

普通高等教育“十三五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材

现代控制理论教程

张宇献 李 勇 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书适用于工程与应用类院校自动化、电气工程及其自动化等相关专业，力图结合系统的物理概念，深入浅出地阐述现代控制理论基本内容，包括状态空间的基本概念和方法、系统的状态空间描述和标准型、系统的运动分析、能控性和能观测性、结构分解和实现问题，以及系统的稳定性分析、状态反馈和状态观测器等。

本书可作为高等学校自动化、电气工程及其自动化等相关专业的教材，同时也适合广大青年读者和工程技术人员自学。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论教程 / 张宇献，李勇编著. —北京：电子工业出版社，2017.5

电气工程、自动化专业规划教材

ISBN 978-7-121-31494-0

I. ①现… II. ①张… ②李… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 098720 号

策划编辑：赵玉山

责任编辑：赵玉山

印 刷：

装 订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：787×1 092 1/16 印张：14.25 字数：364 千字

版 次：2017 年 5 月第 1 版

印 次：2017 年 5 月第 1 次印刷

定 价：34.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254556，zhaoyz@phei.com.cn。

前 言

随着科学技术的迅速发展,现代控制理论在经典控制理论的基础上得以建立和发展,在工业控制以及其他领域,如航空航天、核技术、生物工程等新兴领域中发挥着越来越重要的作用。因此,自 20 世纪 60 年代以来,国内外的许多大学都把现代控制理论列为自动化、电气工程及其自动化等相关专业的专业课程。

现代控制理论是以状态空间理论为核心,对动态系统进行分析和研究的。它不但可以处理单变量线性定常系统,还可以处理多变量、时变、非线性系统。因此,涉及的数学知识多,公式推导繁杂,不易掌握。当然,不同层次或不同侧重面的院校和专业,对现代控制理论教授内容的要求也不尽相同,目前已有的现代控制理论教材还无法满足各类不同要求。

编者根据多年的教学实践,尽量避免过多的数学推导和深奥的数学知识,结合控制系统的物理含义和例子,深入浅出地讲述有关状态空间的理论和分析方法,使学生能在有限的学时内,掌握好现代控制理论最基本的知识。另外,注重内容的可读性,使读者通过自学也能掌握书中的基本内容。

在内容上,本书主要讲述状态空间法的基本概念和基本方法,其中包括系统状态方程的建立及解法,能控性、能观测性和稳定性等定性理论,极点配置、反馈解耦、观测器设计等综合理论。在结构上,本书首先给出控制系统的数学描述,提出状态变量和状态方程概念;然后对系统进行运动分析,以及能控性、能观测性和稳定性分析;进而给出系统的综合与设计方法。

本书第 1 章至第 4 章由张宇献编写,第 5 章至第 7 章由李勇编写。同时,我们的研究生钱小毅、韩奥琪、郭佳强、陈向文、赵兴昌、房磊、吴晓红、孙振羽、杨鑫参与了本书的文字录入和绘图工作。在本书编写过程中,得到了沈阳工业大学教务处、电气工程学院等单位,以及自动控制原理课题组全体老师的支持,在此,编者对上述单位和个人以及本书所列参考文献的作者,一并表示衷心的感谢。

本书提供配套的电子课件,可登录电子工业出版社的华信教育资源网:www.hxedu.com.cn,注册后免费下载。

由于编者水平有限,书中难免有不妥和错误之处,敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 控制理论的研究对象	(1)
1.2 控制理论的发展历程	(2)
1.3 现代控制理论的基本内容	(5)
1.4 与经典控制理论的联系	(6)
1.5 本书的主要内容和特点	(7)
第 2 章 预备知识	(9)
2.1 基本概念和定义	(9)
2.2 基本运算	(13)
2.3 矩阵的特征方程、特征值和特征向量	(18)
2.4 矩阵的相似变换	(23)
2.5 二次型概念	(32)
2.6 矩阵的微分和积分	(34)
2.7 利用 MATLAB 进行矩阵运算	(37)
思考题与习题	(40)
第 3 章 系统的状态空间描述	(42)
3.1 状态空间的基本概念	(42)
3.1.1 几个定义	(42)
3.1.2 状态空间表达式的一般形式	(43)
3.1.3 状态空间表达式的系统方框图和状态变量图	(46)
3.2 状态空间表达式的建立	(47)
3.2.1 系统的状态空间的列写	(47)
3.2.2 由高阶微分方程化为状态空间描述	(51)
3.2.3 由传递函数建立状态空间表达式	(64)
3.3 状态空间描述转化为传递函数	(70)
3.3.1 由状态空间描述求传递函数	(70)
3.3.2 组合系统的状态空间描述和传递函数矩阵	(74)
3.4 状态矢量的线性变换	(78)
3.4.1 系统状态方程的非唯一性	(78)
3.4.2 系统特征值的不变性	(80)
3.4.3 特征矢量	(81)
3.4.4 状态空间描述变换为约当标准型	(82)
3.5 离散时间系统的状态空间描述	(88)
3.5.1 离散系统的状态空间表达式	(88)
3.5.2 由差分方程化为状态空间表达式	(89)
3.5.3 由脉冲传递函数化为状态空间表达式	(92)

3.5.4 由离散系统状态空间表达式求脉冲传递函数矩阵	(94)
3.6 利用 MATLAB 进行线性系统的状态描述	(95)
思考题与习题	(99)
第 4 章 线性动态系统的运动分析	(102)
4.1 线性定常齐次状态方程的求解	(102)
4.2 矩阵指数函数及状态转移矩阵	(105)
4.3 线性定常非齐次状态方程的求解	(114)
4.4 连续系统的时间离散化	(115)
4.4.1 连续时间线性系统的离散化模型	(116)
4.4.2 连续时间线性系统近似离散化模型	(117)
4.5 线性离散系统的运动分析	(117)
4.5.1 迭代法	(118)
4.5.2 z 变换法求解	(119)
4.6 利用 MATLAB 进行线性系统的运动分析	(120)
思考题与习题	(126)
第 5 章 线性控制系统的能控性和能观测性	(128)
5.1 线性定常连续系统的能控性	(128)
5.2 线性连续系统的能观测性	(132)
5.3 能控性和能观测性与传递函数零极点的关系	(133)
5.4 对偶原理	(135)
5.5 能控标准型和能观测标准型	(136)
5.6 系统的结构分解	(141)
5.7 传递函数阵的实现问题	(145)
5.7.1 单输入单输出系统的实现问题	(145)
5.7.2 多输入多输出系统的实现问题	(149)
5.8 离散系统的能控性与能观测性	(152)
5.9 利用 MATLAB 分析系统的能控性和能观测性	(154)
思考题与习题	(157)
第 6 章 控制系统的稳定性与李亚普诺夫方法	(160)
6.1 稳定性的概念	(160)
6.1.1 外部稳定性	(160)
6.1.2 内部稳定性	(161)
6.1.3 内部稳定性和外部稳定性的关系	(162)
6.2 李亚普诺夫意义下稳定性的定义	(162)
6.2.1 平衡状态	(162)
6.2.2 范数的概念	(163)
6.2.3 李亚普诺夫稳定性定义	(164)
6.3 李亚普诺夫稳定性理论	(165)
6.3.1 李亚普诺夫第一法(间接法)	(166)
6.3.2 李亚普诺夫第二法	(167)

6.3.3	二次型及其正定性	(168)
6.3.4	李亚普诺夫第二法稳定性定理	(169)
6.4	线性定常连续系统的稳定性	(172)
6.4.1	线性连续系统稳定性分析	(173)
6.4.2	线性时变连续系统	(176)
6.5	线性定常离散系统的稳定性	(177)
6.6	非线性系统的稳定性分析	(178)
6.6.1	克拉索夫斯基法	(178)
6.6.2	变量梯度法	(180)
6.7	利用 MATLAB 分析系统的稳定	(182)
6.7.1	利用李亚普诺夫第一法判断系统的稳定性	(182)
6.7.2	利用李亚普诺夫第二法判断系统的稳定性	(183)
	思考题与习题	(184)
第 7 章	线性反馈控制系统的综合	(186)
7.1	状态反馈与输出反馈	(186)
7.1.1	状态反馈	(186)
7.1.2	输出反馈	(187)
7.2	反馈控制对能控性与能观测性的影响	(188)
7.3	闭环系统极点配置	(189)
7.4	采用状态观测器的状态反馈系统	(194)
7.4.1	状态重构问题	(194)
7.4.2	状态观测器的存在条件	(194)
7.4.3	状态观测器的设计	(196)
7.5	带有状态观测器的状态反馈系统	(202)
7.6	解耦控制	(205)
7.7	MATLAB 在闭环极点配置及状态观测器设计中的应用	(212)
7.7.1	系统的极点配置	(212)
7.7.2	用 MATLAB 设计状态观测器	(215)
	思考题与习题	(215)
参考文献	(218)

第1章 绪 论

随着生产规模的扩大以及空间技术的发展,经典控制理论日益暴露出它的局限性,无法适应宇航、经济、生物等各个领域的发展需要。现代科学技术的迅速发展对自动控制的程度、精度、速度、范围及其适应能力的要求越来越高,以状态空间概念为基础的现代控制理论,已形成多个分支,渗透到各个科技领域。本章在简要概述控制理论的研究对象和控制理论发展历程的基础上,介绍了现代控制理论研究的基本内容及其与经典控制理论的区别及联系。本章的目的是着重就研究对象、基本内容和论述范围等进行简要的介绍,以期在宏观层次上对现代控制理论有一个总体的认识。

1.1 控制理论的研究对象

系统存在于自然界和人类社会的一切领域中。系统是控制理论所要研究的对象。这一节首先介绍系统、动态系统、线性系统等一些基本概念。

1. 系统

通常将系统定义为由相互关联和相互制约的若干“部分”所组成的具有特定功能的一个“整体”。系统的状态由描述系统行为特征的变量来表示。随着时间的推移系统会不断地演化。导致系统状态和演化进程发生变化的因素主要包括外部环境的影响,内部组成的相互作用,以及人为的控制作用等。

可以看出,系统作为系统控制理论的一个基本概念,具有如下3个基本特征。

(1) 整体性。整体性包含两层基本含义。一是强调系统在结构上的整体性,即系统由“部分”所组成,各组成部分之间的相互作用是通过物质、能量和信息的交换来实现的。二是突出系统行为和功能由整体所决定的特点,系统可以具有其组成部分所没有的功能,有着相同部分但它们的关联和作用关系不同的两个系统可以呈现出很不相同的行为和功能。

(2) 抽象性。在现实世界中,一个系统总是具有具体的物理、自然或社会属性。例如工程领域中的机电系统、制造系统、电力系统、通信系统等,自然领域中的生物系统、生态系统、气候系统等,以及社会领域中的经济系统、人口系统、社会系统等。但是,作为系统控制理论的研究对象的系统,常常是抽取了具体系统的物理、自然或社会含义,而把它抽象为一个一般意义下的系统而加以研究。系统概念的这种抽象化处理,有助于揭示系统的一般特性和规律,使系统控制理论和方法具有普适性。

(3) 相对性。在系统的定义中,所谓“系统”和“部分”这种称谓具有相对的属性。事实上,对于一个系统而言,其组成部分通常也是由若干个更小部分所组成的一个系统,而这个系统往往又是另一个系统的一个组成部分。

2. 动态系统

所谓动态系统,就是运动状态按确定规律或确定系统规律随时间演化的一类系统,通常也称为动力学系统。大量的自然系统、工程系统和社会系统都属于动态系统。动态系统是系统控制理论所研究的主体。

动态系统的行为由其各类变量间的关系表征。系统的变量可区分为三类形式。一是反映

外部对系统的影响或作用的输入变量组，如控制、投入、扰动等；二是表征系统状态行为的内部状态变量组；三是反映系统对外部作用或影响的输出变量组，如响应、产出等。对于很大的动态系统，可以基于数学语言来对系统变量间的动态过程进行描述，这种描述常常具有微分方程组或差分方程组的形式。在系统描述的基础上，通过解析推导或数值分析等途径，可对系统的运动规律和各种性质给出严格的和定量的表达。表征系统动态过程的数学描述具有两类基本形式。一是系统的内部描述，通常也被称为“白箱描述”，它是建立在系统的内部机理为已知的前提之上的。内部描述由两部分组成：一部分是反映输入变量组对状态变量组的动态影响关系，其描述具有微分方程组或差分方程组的形式；另一部分是反映输入变量组和状态变量组两者到输出变量组间的变换影响关系，其描述呈现为代数方程的形式。二是系统的外部描述，通常也被称为“黑箱描述”或输入输出描述，它是建立在系统的内部机理为未知的前提之上的。外部描述反映的是输入变量组对输出变量组间的动态影响关系，描述具有高阶微分方程组或高阶差分方程组的形式。对于特定的动态系统，两类描述之间可以进行相互转化，内部描述通过既定的关系可化为输入输出描述，输入输出描述也可以通过“实现理论”所提供的算法化为内部描述。

3. 线性系统

线性系统是最为简单和最为基本的一类动态系统。线性系统的一个基本特征是其模型方程具有线性属性即满足叠加原理。叠加原理是指，若系统的数学描述为 L 。则对任意两个输入变量 u_1 和 u_2 以及任意两个非零有限常数 c_1 和 c_2 ，必成立关系式：

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2)$$

对于线性系统，通常还可进一步细分为线性时不变系统（Linear time-invariant systems）和线性时变系统（Linear time-varying systems）两类。

线性时不变系统也称为线性定常系统或线性常数系统。其特点是，描述系统动态过程的线性微分方程或差分方程中，每个系数都是不随时间变化的常数。从实际的观点而言，线性时不变系统也是实际系统的一种理想化模型，实质上是对实际系统经过近似化和工程化处理后所导出的一类理想化系统。但是，由于线性时不变系统在研究上的简便性和基础性，并且为数较多的实际系统都可以在一定范围内足够精确地用线性时不变系统来代表，因此自然地成为控制系统理论中的主要研究对象。

线性时变系统也称为线性变系数系统。其特点是，表征系统动态过程的线性微分方程或差分方程中，至少包含一个参数为随时间变化的函数。在现实世界中，由于系统外部和内部的原因，参数的变化是不可避免的，因此，严格地说几乎所有系统都属于时变系统的范畴。但是，从研究的角度，只要参数随时间的变化远慢于系统状态随时间的变化，那么就可将系统按时不变系统来研究，由此而导致的误差完全可以达到忽略不计的程度。

线性时不变系统和线性时变系统在系统描述上的这种区别，既决定了两者在运动状态特征上的实质性差别，也决定了两者在分析和综合方法的复杂程度上的重要差别。

1.2 控制理论的发展历程

自动控制理论是关于自动控制系统及其分析与设计的理论，其任务是研究自动控制系统中变量的运动规律和改变这种运动规律的可能性和途径，为建立高性能的自动控制系统提供必要的理论依据。

自动控制的思想可以追溯到久远的古代，古代罗马人的具有反馈原理的简单水位控制装置，我国和希腊古代的具有反馈原理控制水流速度的“铜壶滴漏”钟，两千年前我们祖先发明的指南车，公元 1086—1089 年我国的苏颂和韩公廉发明的水运仪象台等都是典型的例子。但自动控制的大量应用却始于第一次工业革命时代。1788 年，瓦特（J. Watt）使用的自动调节进气阀门开度以控制蒸汽机转速的离心式调速器是闭环自动控制装置在工程实践中应用的第一项重大成果。以此为背景，物理学家麦克斯韦（J. C. Maxwell）于 1868 年在“论调节器”这篇论文中首次对反馈控制系统的稳定性进行系统分析，指出系统稳定性取决于系统微分方程对应的特征方程的根具有负实部，该论文是控制理论早期发展的奠基之作。随后，自动控制理论开始形成并随着控制工程实践的需要不断发展。纵观自动控制理论 100 多年的发展历程，根据研究方法和思路的不同，一般可分为如下 3 个阶段。

1. 控制理论发展初期及经典控制理论阶段

1868 年麦克斯韦从理论上揭示了反馈系统的稳定性与系统微分方程对应的特征方程的特征根在复平面上分布位置的关系；1877 年劳斯（E. J. Routh）、1895 年赫尔维茨（A. Hurwitz）分别研究了系统的稳定性与特征方程系数的关系，并分别独立给出了高阶线性系统稳定性的代数判据，这就是至今仍得到应用的劳斯判据和赫尔维茨判据。针对非线性和时变系统稳定性问题，1892 年李亚普诺夫（A. M. Lyapunov）提出用可模拟系统能量的假想标量函数——“李亚普诺夫函数”的正定性及其导数的负定性直接判别系统稳定性的判据，建立了动力学系统稳定性的一般理论。

1922 年，米诺斯基（N. Minorsky）提出比例积分微分（PID）控制律，其将负反馈系统偏差的现状（比例 P）、历史（积分 I）和变化趋势（微分 D）线性组合成复合控制量，对被控对象进行控制，兼顾了系统稳定性、快速性和准确性 3 个方面的要求，应用广泛。1942 年，尼科尔斯（N. B. Nichols）提出 PID 参数最佳整定法，发展了 PID 算法。

1927 年，为了减小电子管放大器的非线性引起的信号失真，布莱克（H. S. Black）提出了反馈放大器，“反馈”这一自动控制的基本原理和基本方法开始建立；但提高反馈系统的开环增益以减小误差（失真）与系统稳定性要求降低开环增益是矛盾的，这就涉及反馈系统的稳定性问题。当动态特征很复杂时，难以用基于时域的劳斯-赫尔维茨判据解决。1932 年，奈奎斯特（H. Nyquist）提出负反馈系统稳定性频域判据，标志着经典控制理论的形成，其揭示了系统开环幅相频率特性 $G(j\omega)$ 和闭环系统稳定性的本质联系。1943 年，哈尔（A. C. Hall）基于传递函数这一描述系统动态特性的复数域数学模型，将通信工程的频率响应法和机械工程的时域方法统一为经典控制理论的复数域方法。传递函数可通过在零初始条件下对线性常微分方程进行拉普拉斯（Laplace）变换得到，其不仅回避了求解高阶微分方程的困难，而且可直接应用传递函数研究系统结构和参数对性能指标的影响。1945 年，伯德（H. W. Bode）出版了《网络分析和反馈放大器设计》一书，提出了使频率响应法更适合工程应用的 Bode 图法。Bode 图绘制简便且有良好的工程分析精度，不仅可分析判断闭环系统动、静态性能，而且可确切获取闭环系统稳定性和稳定裕度的信息。1948 年，伊凡思（W. R. Evans）则提出了复数域分析和设计负反馈系统的方法——根轨迹法，即直接由开环零、极点在复平面的分布求闭环特征根随某一参数变化的轨迹。至此，以传递函数为动态数学模型、频率响应法和根轨迹法两种频域方法为核心，主要研究单输入单输出（SISO）线性定常（LTI）反馈系统的经典控制理论基本成熟。

1944 年，美国陆军发明的自动化防空火炮系统是经典控制理论应用于工程实践的成功范

例之一。数学家维纳（N. Wiener）从中提炼出“信息”、“系统”、“控制”3个要素，于1948年出版了自动化科学的奠基著作《控制论——动物和机器中的控制与通信》。该书与1945年贝塔朗菲的《关于一般系统论》、1948年香农（C. Shannon）的《通信的数学理论》简称为“三论”（控制论、系统论、信息论），共同构筑了自动化与信息科学技术的理论基础。

2. 现代控制理论阶段

20世纪60年代，随着电子计算机技术的进步，航空航天技术和综合自动化发展的需要，推动了以状态空间描述为基础、最优控制为核心，主要在时域研究多输入多输出（MIMO）系统的现代控制理论的诞生。

1957年，苏联成功发射人类历史上第一颗人造地球卫星；1968年，美国“阿波罗”宇宙飞船登上月球，揭开了人类开始征服太空的序幕。航天器控制系统是多输入多输出的系统，而且要求设计某种性能要求指标下的最优控制系统，用经典控制理论基于传递函数的频域方法难以解决。卡尔曼（R. E. Kalman）、贝尔曼（R. Bellman）和庞特里亚金（L. S. Pontryagin）等提倡从变换后的频域回到时域，用状态空间表达式（一阶微分或差分方程组）建立MIMO线性/非线性、定常/时变系统的动态数学模型，并提出与经典控制理论频域法不同的状态反馈和最优控制方法，即现代控制理论。其包含20世纪50年代贝尔曼提出的寻求最优控制的动态规划法和庞特里亚金提出的极小值原理，20世纪60年代卡尔曼分析系统引入的状态空间分析法及提出的多变量最优控制和最优滤波理论、能控性和能观测性概念。1958年，由于控制科学中研究非线性系统大范围稳定性问题的推动，基于状态变量法的李亚普诺夫稳定性理论在控制理论的文献中开始被引用，并掀起了相当持久的李亚普诺夫热。应该指出，数字计算机技术的飞速发展，为多变量复杂系统的时域分析提供了物质基础。事实上，现代控制理论的状态空间方法以计算机作为系统建模、分析、设计、控制的工具。

最优控制依赖确定的数学模型，但环境和被控对象参数不可避免的变化将导致实际系统的模型发生变化。因此，在线辨识系统数学模型，并按当前模型修改最优控制律的自适应控制及系统辨识理论也是现代控制理论的研究范畴。20世纪70年代以来，自适应控制理论进展显著，奥斯特隆姆（K. J. Åström）和朗道（Landau）等为此做出了贡献。1970年，罗森布洛克（H. H. Rosenbrock）等提出多变量频域控制理论，将传统频域方法发展为现代频域方法。为了使控制算法对系统模型的变化具有更强的适应性，产生了预测控制和鲁棒控制等方法。这些新方法都是现代控制理论在控制工程实践需要的推动下向深度和广度发展的成果。

3. 智能控制理论阶段

20世纪70年代以来，控制理论应用领域已从传统的军事、工业扩展到社会经济、能源环境、生物医学等系统，因此被控对象难以精确描述，控制任务复杂，使基于数学模型、控制任务要求较单一的现代控制理论面临困难，由此产生了智能控制理论。

智能控制是针对控制系统（被控对象、环境、目标、任务）的不确定性和复杂性产生的不依赖于或不完全依赖于控制对象的数学模型，以知识、经验为基础，模仿人类智能的非传统控制方法。和空间技术、原子能技术并列为20世纪3大科学成就的人工智能技术的发展，促进了自动控制理论向智能控制理论方向的发展。1971年，傅京孙（K. S. Fu）将智能控制概括为自动控制和人工智能的交集，体现了智能控制系统多元跨学科的基本结构特征。随着智能控制技术研究的深入及其工程化、实用化，在二元交集论基础上产生了三元、四元、多元等智能控制结构，智能控制的理论体系正在不断地发展和完善之中。1991年，奥斯特隆姆提出“模糊逻辑控制、神经网络控制、专家控制是3种典型的智能控制方法”，较全面地阐

明了智能控制的几个重要分支。除此之外，学习控制、仿人控制、混沌控制等则是智能控制的新兴研究方向。

1.3 现代控制理论的基本内容

现代控制理论是应用状态空间法对多输入多输出、线性或非线性、定常或时变系统的状态进行分析与综合的理论。其采用状态空间表达式作为系统的动态模型，以能控性、能观测性揭示系统外部特性（输入、输出）与内部特性（状态），采用状态反馈、极点配置的方法对系统进行综合，以实现系统性能指标的最优。现代控制理论的研究范畴主要有如下几个方面。

1. 系统辨识

基于动态系统的状态空间的数学模型进行分析和控制是现代控制理论的特点之一。因此，系统辨识和建模是现代控制理论重要研究范畴之一。当系统较复杂时，解析法建模不再适用，而需要采用实验研究的方法即系统辨识方法。在基于试验知识所提出的被辨识系统模型的类型中，根据对所选择的输入试验信号作用下的被辨识系统的输出响应的观测，估计被辨识系统等效数学模型的结构参数和模型参数，并进行模型校验。其中，参数估计是系统辨识中最重要和发展最快的研究领域，已出现很多参数估计的计算方法，如基于脉冲响应的脉冲响应法、相关函数法、局部辨识法；基于最小二乘法的加权最小二乘法、递推最小二乘法、广义最小二乘法等；基于似然函数的极大似然法等。

2. 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论中应用最广泛的独立分支，也是现代控制理论的基础。其采用状态空间法对线性动态系统进行定量分析（即确定在不同输入控制作用下系统状态的动态响应）和定性分析（即稳定性、能控性、能观测性分析），并采用状态反馈配置闭环极点的方法控制并改善系统状态的动态响应。

低阶线性定常系统的稳定性分析，既可采用李亚普诺夫稳定性判据的第一法（间接法），即求系统微分方程的解，根据解的性质判断系统稳定性；也可采用李亚普诺夫稳定性判据的第二法（直接法），即不求解系统微分方程，二是构造“李亚普诺夫函数”，并根据该标量函数的正定性及其导数的负定性直接判别系统的稳定性。李亚普诺夫直接法提供了判别任何复杂系统稳定性的方法，在高阶线性定常系统、非线性系统、时变系统稳定性分析中有明显优势，应用广泛。因此，尽管基于状态变量法的李亚普诺夫稳定性理论是 1892 年提出的，但控制系统的李亚普诺夫稳定性分析仍是现代控制理论的组成部分。

在状态空间法的基础上，派生了基于几何方法的线性系统几何理论、基于抽象代数的线性系统代数理论及基于经典频率法的线性多变量频域理论等新分支。

3. 最优控制

最优控制是现代控制理论的核心。最优控制问题就是在多种约束条件下寻找使系统某个性能指标泛函极值的控制规律，故其数学本质是求某泛函的条件极值问题，即变分学问题。针对经典变分法只适用于求解无约束或允许控制属于开集的最优控制问题的局限，20 世纪 50 年代，庞特里亚金提出“极小值原理”，发展了经典变分理论，以处理允许控制属于闭集的最优控制问题。与此同时，贝尔曼为解决多级决策问题，提出“动态规划”。“极小值原理”和“动态规划”是研究最优控制问题最重要的两种方法。随着控制理论的发展，最优控制也有很大发展，如分布参数的最优控制、随机最优控制、大系统的最优控制等。

4. 最优滤波（最佳估计）

最优控制规律是被控系统内部状态向量的函数，但由于被控系统和测量装置存在随机干扰和测量装置的限制，一般难以精确地测量出系统全部状态的信息。故基于已建立的系统数学模型，从夹杂着随机噪声的系统输入/输出的测量数据中，采用统计方法，针对一定统计规则（如最小方差估计、极大似然估计、最小二乘估计等）求出系统状态的最优估计，即最优滤波是闭环系统最优控制工程实现的前提。基于最小方差准则的维纳滤波和卡尔曼滤波是得到广泛应用的两种最优线性滤波方法。20 世纪 40 年代提出的维纳滤波方法开创了应用统计方法研究随机控制问题的新领域，但其仅是对平稳随机过程最优滤波的方法；20 世纪 60 年代提出的卡尔曼滤波理论克服了维纳滤波理论的局限性，适用于非平稳随机过程，已在通信、控制、导航及其他具有随机信号处理的很多领域得到广泛应用。对非线性系统，由于在理论上难以找到严格的递推滤波公式，目前一般采用非线性滤波线性化的近似方法（如连续型和离散型线性化卡尔曼滤波、推广的卡尔曼滤波）处理非线性滤波问题。

5. 自适应控制

系统的不确定性（如被控对象参数未知或工作状况改变和环境变化引起系统参数改变）是对基于数学模型的传统控制的挑战，自适应控制正是为解决环境和被控对象参数有较大变化的系统仍能自动保持在接近某种意义下最优运行状态这一问题提出的。“自适应控制”基于在线辨识系统数学模型，将系统当前性能与最优性能比较，实时调整控制器的结构、参数，即修改最优控制规律，以保证系统适应环境和被控对象参数变化，保持最优性能。模型参考自适应控制系统和自校正控制系统是自适应控制系统的两种基本形式。目前，自适应控制理论仍在迅速发展之中，这反映了现代控制系统向智能化、精确化方向发展的总趋势。

本书主要针对上述第 2 部分内容进行讲解，其余部分请参阅其他教材。

1.4 与经典控制理论的比较与联系

“经典控制理论”和“现代控制理论”这两个词是 1960 年在第一届全美联合自动控制会议上提出的。在这次会议上把系统和控制领域中研究单变量控制问题的理论称为经典控制理论，研究多变量控制问题的理论为现代控制理论。现在，一些学者对“经典”和“现代”的提法是否恰当也提出了不同的观点。

按经典控制理论和现代控制理论的提法，经典控制理论是自动控制理论中建立在频率响应法和根轨迹基础上的一个分支。它的研究对象是单输入单输出的自动控制系统，特别是线性非时变系统。经典控制理论是以输入输出特性（主要是传递函数）为系统的数学模型，采用频率响应法和根轨迹这些图解的方法来分析系统的性能和设计控制装置。现代控制理论则是建立在状态空间法基础上的一种研究多变量控制系统的控制理论，对控制系统的分析和设计主要是通过对系统的状态变量描述进行的，基本方法是时域方法，是自动控制理论的一个主要组成部分。

1. 现代控制理论与经典控制理论的比较

经典控制理论的基本内容有时域法、频域法、根轨迹法、描述函数法、相平面法、代数和几何稳定判据、校正网络设计等，主要研究稳定性问题。现代控制理论的基本内容有系统辨识、最优控制问题、最佳滤波问题，研究的主要问题是优化问题。

现代控制理论与经典控制理论相比，首先其适应对象不同。一般来说，经典控制理论只

对单输入单输出定常系统的分析与综合有效,而现代控制理论则适用于线性和非线性、定常和时变、单变量和多变量以及连续和离散系统。现代控制理论使用领域的扩大,使它成为更普遍性的理论。

现代控制理论与经典控制理论采用的数学工具不同。由于经典控制理论主要限于处理单变量的线性定常问题,反映到数学上就是单变量的常微分方程问题,因此拉普拉斯变换就成了它的主要数学工具,数学模型是传递函数。现代控制理论要处理多变量问题,矩阵和向量空间理论是它的主要数学基础。

现代控制理论与经典控制理论的研究方法不同。经典控制理论是一种频域方法,它以系统的输入输出的特性作为研究依据,而现代控制理论的本质是一种时域方法,以状态变量描述方法作为研究依据。因此,经典控制理论着眼于系统的输出,而现代控制理论则着眼于系统的状态,它能更完全地描述系统的动力学性质。

现代控制理论与经典控制理论的综合也有一定差别。经典控制理论是在给定一类特定输入的情况下,分析输出的响应。在综合问题上,是根据给定的某种指标来设计系统的校正网络。经典控制理论着眼于系统外部联系,而现代控制理论则主要揭示系统对控制和初始状态的依赖关系,指出其可能影响的性质和程度,揭示系统在一定的指标提法和其他限制条件下可能达到的最佳状态,即最优控制。

现代控制理论与经典控制理论在控制器的实现上亦不同。经典控制理论的控制器即校正装置,是由能实现经典控制规律的调节器构成的,简单的就是无源/有源网络,而现代控制理论的控制器是能实现任意控制规律的数字计算机。

2. 现代控制理论与经典控制理论的关系

现代控制理论是在经典控制理论的基础上发展起来的,虽然二者在数学工具、理论基础和研究方法上有着本质的区别,但对动态系统进行分析研究时,两种理论可以相互补充、相辅相成,而不是相互排斥。特别是对于线性系统的研究,越来越多的经典理论中行之有效的方法已渗透到现代控制理论内部,如零极点配置和频域方法,大大丰富了现代控制理论的研究内容。

现代控制理论本质上是时域法,是建立在状态空间基础上的,它不用传递函数。而是用状态矢量方程作为基本工具,从而大大简化了数学表达公式,原则上可以分析多输入多输出、非线性及时变系统。应用状态空间法对系统进行分析,主要借助于计算机求解状态方程,根据状态解就可以对系统做出评估。由于不需要经过任何变换,在时域中直接求解分析,性能指标是非常直观的。另外,在系统的设计方法上,可以在严格的理论基础上,推导出满足一定性能指标的最优控制系统。在经典理论应用上存在的局限和困难之处,在现代控制理论中也能迎刃而解。

现代控制理论的出现,是人类探索空间的客观需要。随着社会的发展与科学技术的进步,控制理论将不断完善。具体来说,状态与状态空间概念和方法的引入,在现代控制理论中起了很重要的作用。如果说经典控制理论是研究控制系统输出的分析与综合的理论,那么可以说,现代控制理论是研究控制系统状态的分析与综合的理论。

1.5 本书的主要内容和特点

现代控制理论研究范围较广,线性系统理论、最优控制、系统辨识、最优估计理论、自适应控制均是现代控制理论的重要内容,但受教学学时和教材篇幅的限制,难以做到面面俱到。

考虑到线性系统理论是现代控制理论的基础,本书从工程应用角度出发,以线性系统理论的时域分析为主线,介绍现代控制理论的基本方法。其中,线性系统理论部分主要阐述状态空间分析法和综合法的基本内容,包括动态系统的状态空间描述、动态系统的定量分析(状态方程的解)和定性分析(能控性、能观测性、李亚普诺夫稳定性)、动态系统的综合(状态反馈与状态观测器设计)。鉴于 MATLAB 已成为国际控制领域应用广泛的工具软件,本书在保证理论知识体系结构完整的前提下,融入了 MATLAB 应用。

为了避免使现代控制理论的概念、方法仅仅停留在数学表达式上,本书编者做了一些努力,试图形成如下特色:

(1) 学习目标明确,学习重点突出

本教材在编写中,注重知识体系具备科学性、系统性。把握电气工程学科相关课程之间的关系,强调知识的渐进性,兼顾知识的系统性,结构逻辑性强,整本教材形成一套完整而严密的知识结构体系。在教材每章的开头明确本章包含的知识点,并指出各知识点应掌握的程度,学习目标明确,学习重点突出。同时在教材的编写中突出解决问题的思路与方法,对知识的讲解力求深入浅出。避免复杂公式推导,力求做到层次清楚、内容精简、逻辑性强。

(2) 夯实基础知识,明晰核心知识

现代控制理论课程作为自动化、电气工程及其自动化的专业课,以状态空间理论为核心,对动态系统进行分析,它不但可以处理单变量线性定常系统,还可以处理多变量、时变、非线性系统。因此,涉及的数学知识多,公式推导繁杂,不易掌握。教材编写团队根据多年的教学实践,在夯实和补充线性空间和矩阵理论和向量矩阵运算等必要数学知识的基础上,力求让学生掌握线性系统理论的核心知识,并结合控制系统的物理含义和例子,深入浅出地讲述相关空间理论和分析方法,使学生能在有限的学时内掌握好现代控制理论的最基本知识。另外,在教材编写过程中注意提高内容的可读性,使读者能够通过自学掌握书中的基本内容,提高学生的独立自学能力。

(3) 讲授实验结合,加深知识理解

本教材的编写注意理论教学与实验训练相结合,将 MATLAB 仿真软件引入课堂教学,有利于培养学生利用计算机进行科学研究及解决实际问题的能力。在教材的每章最后一节,介绍本章知识点对应的 MATLAB 软件仿真实例,对本章所讲授的核心知识点进行实验分析,通过简单的程序编写和调试,使学生进一步掌握线性控制系统参数对控制系统性能的影响,加深学生对本章所学知识的理解。同时,教材提供相应的素材、程序代码、习题参考答案等教学资源,以适合教学需要。

(4) 理论结合实际,注重实践培养

本教材面向应用型人才的培养,具有大量当前实用的个案实例研究,注重培养学生的实践能力,增强学生的专业素养,让学生学而有用,学而能用。在教材的编写中针对自动化、电气工程及其自动化等专业的工科背景,注意结合工程意义讲解基本概念,注重内容的工程性和系统性。从基本的电路网络系统到机电控制系统,由浅入深层层深入,将现代控制理论与实际控制对象相联系。

第2章 预备知识

以状态空间描述为基础的现代控制理论，其各章节内容多涉及矩阵、线性代数相关的基本概念和运算。本章主要介绍矩阵相关的一些基本概念和定义，矩阵的运算，特征值和特征向量、二次型以及矩阵的微积分计算，为后续章节内容提供知识基础。

2.1 基本概念和定义

矩阵常用来简化复杂的数学表达式。例如： n 个联立代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

可用矩阵方程表示

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}$$

矩阵定义：矩阵是按矩形阵列排列的若干个元素的集合，或者由 $m \times n$ 个元素有次序地排列成 m 行 n 列的表，叫做 $m \times n$ 阶矩阵。

如 $m \times n$ 阶矩阵表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]^{m \times n}$$

式中， a_{ij} 叫做矩阵的第 i 行第 j 列元素。

方阵：行数和列数相同的矩阵叫做方阵。值得注意的是，方阵与行列式是两个不同的概念。 n 阶方阵只是由 n^2 个元素排列成的一个正方形的表，而 n 阶行列式却是由 n^2 个数按一定规律进行运算，最后得到一个唯一的数值，即行列式表示一个数值。

列矩阵：只有一列的矩阵称为列矩阵，又称为列向量。

$n \times 1$ 阶矩阵又称为 n 维列向量，如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

行矩阵：只有一行的矩阵称为行矩阵，又称为行向量。

$1 \times m$ 阶矩阵又称为 m 维行向量，如

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]$$

矩阵可看成是由列向量或行向量所组成的，如

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

式中， a_i 表示 m 维列向量

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

或者

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_m^* \end{bmatrix}$$

式中， a_j^* 表示 n 维行向量

$$a_j^* = [a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}]$$

对角矩阵：若一个 n 阶方阵 A 除主对角线元素外，其余的元素都是零，就称 A 为对角矩阵，记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

单位阵或幺阵：在对角矩阵中，当主对角线上的元素全等于1时，则称此对角矩阵为单位阵(或幺阵)，记为

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, 1, \cdots, 1)$$

零阵：指所有元素全等于零的矩阵，例如

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵相等：两个矩阵 A 和 B 只有在满足条件：a)行数和列数分别相等；b)对应的元素都相等时，才是彼此相等的，记为

$$A = B$$

对称矩阵：如果方阵 A 对于所有的元素满足条件 $a_{ij} = a_{ji}$ ，那么方阵 A 称为对称矩阵。例

如 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ 为对称矩阵。

转置矩阵：如果 $n \times m$ 阶矩阵 A 的行、列互换，那么由此而得的 $m \times n$ 阶矩阵叫做 A 的转置矩阵。以 A^T （或 A' ）表示，如

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

不言而喻，对称矩阵有 $A = A^T$ 。

共轭矩阵：如果矩阵 A 的复数元素分别用它们各自的共轭复数来替换，那么由此得到的矩阵叫做 A 的共轭矩阵。用 \bar{A} 表示，如

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+j & -3-3j & -1+4j \\ -1+j & -1 & -2+4j \end{bmatrix}$$

则

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-j & -3+3j & -1-4j \\ -1-j & -1 & -2-4j \end{bmatrix}$$

逆阵：设有一个方阵 A ，若存在另一个方阵 B 满足关系式

$$AB = BA = I$$

则把方阵 B 叫做 A 的逆矩阵，记为

$$A^{-1} = B$$

奇异矩阵：如果方阵所对应的行列式为零，则把该方阵称为奇异矩阵。

非奇异矩阵（满秩矩阵）：如果方阵所对应的行列式不为零，称之为非奇异矩阵。

矩阵的秩：矩阵 A 的秩是 A 中线性独立的列（或行）向量的最大数目（即列向量或行向量线性无关向量的最大个数），或 A 中包括的最大的非奇异矩阵的阶数，即矩阵所对应的不等于零的子行列式的最大阶数。例如最大阶数为 r ，记为

$$\text{rank } A = r$$

向量线性无关：如果

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$$

式中， a_i 为 n 维向量； k_i 为常数，且 $i=1, 2, \cdots, m$ ，仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时，该式立，则称 a_1, a_2, \cdots, a_m 线性无关，否则线性相关。

余子式 M_{ij} ：从 $n \times n$ 阶矩阵 A 中去掉第 i 行、第 j 列所得的 $(n-1) \times (n-1)$ 阶矩阵所对应的行列式叫做矩阵 A 的余子式 M_{ij} 。

余因子式 A_{ij} ：矩阵 A 中元素 a_{ij} 的余因子式定义为 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ，也就是说方阵中元素 a_{ij} 的余因子式 A_{ij} 是用 $(-1)^{i+j}$ 乘以从 A 中去掉第 i 行和第 j 列后构成的矩阵所对应的行列式。

伴随矩阵：矩阵 B ，其第 i 行和第 j 列元素等于 A_{ji} 时，称 B 为方阵 A 的伴随矩阵，记为

$$\mathbf{B} = \text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{即 } b_{ij} = A_{ji}$$

例如，求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

的伴随矩阵。

由于

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{22} = a_{22}; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = -a_{21};$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot a_{12} = -a_{12}; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a_{11} = a_{11}$$

故

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

可见，对于二阶矩阵其主对角线上的元素互换位置，其余元素数值不变，符号反号即构成了原矩阵的伴随矩阵。

正交矩阵：若 n 阶方阵 \mathbf{A} 和它的转置矩阵 \mathbf{A}^T 满足如下关系式：

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{或} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

则称矩阵 \mathbf{A} 为正交矩阵。

三角矩阵：形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵称为上三角矩阵。式中， $*$ 为任意数。

形如

$$\begin{bmatrix} b_{11} & & & \mathbf{0} \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

的方阵称为下三角矩阵。式中， $*$ 为任意数。

当 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$, $b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{nn} = 1$ 时，分别称为单位上三角阵和单位下三角阵。

矩阵的迹：方阵 \mathbf{A} 的迹定义为主对角线上的元素之和，记为 $\text{tr}\mathbf{A}$ ，即

$$\text{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

矩阵的范数：范数是一个度量数量大小的量。如同向量的范数一样，矩阵的范数也有许多种定义方法。例如范数可以是最大元素的大小，也可以为矩阵中所有元素模之和。矩阵 \mathbf{A} 常用的范数是

$$\|A\| = [\text{tr}(A^T A)]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.2 基本运算

1. 矩阵的加减法

两个矩阵只有对应行数和列数相等时才能进行加减法运算。此时所构成的新矩阵的元素由该两矩阵对应元素相加减而组成。

2. 矩阵的乘法

标量乘矩阵相当于用该标量遍乘矩阵的每个元素，因此有

$$|aA| = a^n |A|$$

式中， A 为 n 阶方阵。

矩阵乘矩阵，只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时两矩阵才能相乘。运算法则是乘积矩阵的第 i 行第 j 列元素值为第一个矩阵第 i 行的元素与第二个矩阵第 j 列的元素对应乘积之和，即

$$C_{m \times p} = A_{m \times n} B_{n \times p}$$

式中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可见，矩阵相乘，一般不满足交换律，即 $AB \neq BA$ 。由矩阵乘法运算规则，很容易证明：

(1) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ 。设 A 为 $n \times m$ 阶矩阵， B 为 $m \times n$ 阶矩阵，那么

$$C_{n \times n} = AB, \quad D_{m \times m} = BA$$

式中

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{ki}, \quad d_{kk} = \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}$$

则

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr}C = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{ki} \right] = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \right] \\ &= \sum_{k=1}^m d_{kk} = \text{tr}D = \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

(2) $(AB)^T = B^T A^T$ 。设

$$C = AB, \quad C^T = E, \quad B^T = F, \quad A^T = G, \quad P = B^T A^T = FG$$

式中, \mathbf{A} 为 $n \times m$ 阶矩阵, \mathbf{B} 为 $m \times p$ 阶矩阵, 则

$$e_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki}$$

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^m f_{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk}$$

可见

$$e_{ij} = p_{ij}$$

即

$$\mathbf{E} = \mathbf{P} \text{ 或 } (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

若 \mathbf{A} , \mathbf{B} 为对称矩阵, 则其积可以是非对称的, 这是因为此时

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$$

如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

一般说来, 矩阵相乘, 乘积阵的秩不大于每个因子矩阵的秩, 但若用满秩阵乘另一个矩阵 \mathbf{A} , 则乘积阵的秩就等于矩阵 \mathbf{A} 的秩, 另外有 $\text{rank} \mathbf{A} = \text{rank}(\mathbf{AA}^T)$ 。

例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 分块矩阵

把一个矩阵进行分块运算不仅使得计算方便, 而且矩阵之间的关系更为清楚明了, 具有十分重要的理论意义。矩阵分块不但要满足所有子块行数、列数之和, 分别等于原矩阵的行数、列数, 而且根据不同的运算还应满足其他条件。

矩阵加减法运算时, 两矩阵中相应子块应具有相同的行数和列数。

矩阵进行乘法运算时, 第一个矩阵所分的子块的列数要与第二个矩阵所分的子块的行数相同, 且第一个矩阵的列子块所含列数应等于第二个矩阵相应行子块所含的行数, 如

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2]$$

式中, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ 。

可见, 矩阵分块后每个子块就如同矩阵的元素一样进行运算, 但应该注意分块矩阵的转置为两次转置, 首先把子块行列互换, 然后再把每个子块转置。如

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{23}^T \end{bmatrix}$$

4. 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换包含如下内容:

- (1) 矩阵的某一行(或列)乘以不为零的常数 k 。
- (2) 矩阵的某一行(或列)乘以不为零的常数 k 再添加到另一行(或列)对应的元素上去。
- (3) 对调矩阵的任意两行(或列)。

利用矩阵的初等变换可求矩阵的秩, 例如, 设法使 $a_{11} \neq 0$ 其余同行同列的元素全为零, 然后再使 $a_{22} \neq 0$, 继续变换等。

5. 矩阵的求逆运算

设有一个满秩的 n 阶方阵 \mathbf{A} , 求它的逆阵常用三种办法:

(1) 如果已知伴随矩阵 $\text{adj}A$ ，则有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

(2) 利用矩阵的初等变换求逆。通常为方便起见，总是将原矩阵 A 与单位阵 I 排列在一起，同时进行初等行变换，当原矩阵成为单位阵 I 时，原单位阵就成为 A^{-1} ，即

$$[A \quad \cdots \quad I] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I \quad \cdots \quad A^{-1}]$$

(3) 利用分块矩阵求逆。

① 分块矩阵呈对角线方阵。若

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{bmatrix}$$

式中， A_{ii} 为子方块方阵，那么由乘法法则很容易验证

$$A^n = \begin{bmatrix} A_{11}^n & & & \\ & A_{22}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^n \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^{-1} \end{bmatrix}$$

② 分块矩阵求逆公式。设

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} [A_{11}]_{k \times k} & [A_{12}]_{k \times (n-k)} \\ [A_{21}]_{(n-k) \times k} & [A_{22}]_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$$

$$B_{n \times n} = \begin{bmatrix} [B_{11}]_{k \times k} & [B_{12}]_{k \times (n-k)} \\ [B_{21}]_{(n-k) \times k} & [B_{22}]_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$$

且 $AB = BA = I$ ，则

$$A^{-1} = B$$

比较上式各元素相等的条件，得

① 若 A_{11}^{-1} 存在，则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} \\ -B_{22} A_{21} A_{11}^{-1} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

式中， $B_{22} = [A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}]^{-1}$ 。

如果 $A_{12} = O$ ，则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

如果 $A_{21} = O$ ，则

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

② 若 \mathbf{A}_{22}^{-1} 存在, 则

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & -\mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

式中

$$\mathbf{B}_{11} = [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}]^{-1}$$

如果 $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{O}$, 则得式 (2.2.2), 如果 $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{O}$, 则得式 (2.2.3)。

无论用式 (2.2.1) 还是用式 (2.2.4) 都可逐步求出方阵 \mathbf{A} 的逆阵, 例如用式 (2.2.1) 求逆阵, 其步骤如下:

第一步: 计算 $[\mathbf{A}_{11}]_{1 \times 1}$ 的逆阵;

第二步: 计算 $[\mathbf{A}_{11}]_{2 \times 2}$ 的逆阵;

第三步: 计算 $[\mathbf{A}_{11}]_{3 \times 3}$ 的逆阵;

第四步: 一直计算到 $[\mathbf{A}_{11}]_{n \times n}$ 的逆阵。

例如: 求 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆阵。

第一步: 计算 $[\mathbf{A}_{11}]_{1 \times 1}^{-1} = [3]^{-1} = \frac{1}{3}$

第二步: 计算 $[\mathbf{A}_{11}]_{2 \times 2}^{-1}$ 。因为

$$[\mathbf{A}_{11}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{11}]_{1 \times 1} & [\mathbf{A}_{12}]_{1 \times 1} \\ [\mathbf{A}_{21}]_{1 \times 1} & [\mathbf{A}_{22}]_{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

由式 (2.2.1) 知

$$\mathbf{B}_{22} = [\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}]^{-1} = \left[-1 - 1 \times \frac{1}{3} \times 2 \right]^{-1} = -\frac{3}{5}$$

$$\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} = -\frac{1}{3} \times 2 \times \left(-\frac{3}{5} \right) = \frac{2}{5}$$

$$\mathbf{B}_{21} = -\mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} = +\frac{3}{5} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1} - \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \frac{1}{5}$$

由此

$$[\mathbf{A}_{11}]_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

用它作为第三步分块矩阵 $[\mathbf{A}_{11}]_{3 \times 3}$ 的矩阵 \mathbf{A}^{-1} 。

第三步: 计算 $[\mathbf{A}_{11}]_{3 \times 3}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ 。由于

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

而

$$\mathbf{A}_{11}^{-1} = [\mathbf{A}_{11}]_{2 \times 2}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

依式 (2.2.1) 可得

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

③ 矩阵反演公式。比较式 (2.2.1) 和式 (2.2.4) 中第一行, 可得如下矩阵反演公式:

$$[\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}]^{-1} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} [\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}]^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1}$$

$$\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} [\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}]^{-1} = [\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}]^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1}$$

6. 矩阵的因式分解

将方阵 \mathbf{A} 分解成两个三角矩阵的乘积叫做矩阵的因式分解, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}$$

式中, \mathbf{L} 是单位下三角矩阵; \mathbf{U} 是单位上三角矩阵; \mathbf{D} 是对角阵。

矩阵可进行因式分解的条件是: 方阵 \mathbf{A} 的所有主子式非零。

利用矩阵乘法的结合律, 上式可组合成为

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}(\mathbf{D} \mathbf{U}) \quad (2.2.5)$$

或

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L} \mathbf{D}) \mathbf{U} \quad (2.2.6)$$

以式 (2.2.5) 为例, 由于 \mathbf{A} 的行由 \mathbf{L} 的相应行乘以 $(\mathbf{D} \mathbf{U})$ 阵得到, \mathbf{A} 的列由 \mathbf{L} 阵乘以 $(\mathbf{D} \mathbf{U})$ 阵相应列得到, 所以矩阵进行因式分解时, 采用交替行列计算法就可求得 $(\mathbf{D} \mathbf{U})$ 和 \mathbf{L} 各元素, 即轮流计算 $(\mathbf{D} \mathbf{U})$ 的第 i 行和 \mathbf{L} 的第 i 列 ($i=1, 2, \dots, n$) 就可把矩阵 \mathbf{A} 分解成两个三角矩阵的乘积。

例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ x_1 x_2 & x_1 x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

比较得

$$x_2 = 0 \quad x_3 = 2$$

$$x_1 x_2 = 1 \quad x_1 x_3 + x_4 = 3 \quad \text{无解}$$

又如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ x_1 x_2 & x_1 x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

比较得

$$x_2 = 2 \quad x_3 = 2$$

$$x_1 x_2 = 2 \quad x_1 x_3 + x_4 = 2$$

则

$$x_1 = 1 \quad x_4 = 0$$

即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

说明不满足 \mathbf{A} 的所有主子式非零时, 某些情况下 \mathbf{A} 仍能进行因式分解, 但此时所得对角阵 \mathbf{D} 其主对角线上元素不全非零。

同理得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般地, 若 \mathbf{A} 为对称矩阵, 即 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, 此时 \mathbf{A} 可分解为如下形式:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T$$

式中

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \sqrt{\mathbf{D}}$$

事实上, 由于 $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}$, 则 $\mathbf{A}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T \mathbf{L}^T$, 根据分解唯一性知, $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T$, $\mathbf{L}^T = \mathbf{U}$, 于是

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{L}^T = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$$

式中

$$\sqrt{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$$

例如：利用行列交替算法，得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7. 几个常用的关系式

$$(1) \quad [\mathbf{A}^K]^{-1} = [\mathbf{A}^{-1}]^K = \mathbf{A}^{-K}$$

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^K \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{K+l}$$

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \text{ [方阵]}$$

$$(2) \quad [\mathbf{A}\mathbf{B}]^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$[\mathbf{A}^{-1}]^T = [\mathbf{A}^T]^{-1}$$

$$(3) \quad |\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|, \quad |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$$

$$(4) \quad \text{tr}[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \text{tr}[\mathbf{B}\mathbf{A}]$$

2.3 矩阵的特征方程、特征值和特征向量

定义矩阵 $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ 为方阵 \mathbf{A} 的特征矩阵，其对应的行列式

$$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

称为特征多项式，使

$$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

即得矩阵 \mathbf{A} 的特征方程，特征方程式的解 λ_i 称为矩阵的特征值。易知 $\text{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ 。

若 λ_0 为矩阵 \mathbf{A} 的特征值，则方程

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda_0 \mathbf{X}$$

一定有不为零的解向量 \mathbf{X} (因为 $|\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}| = 0$)，称该向量 \mathbf{X} 为矩阵 \mathbf{A} 的属于特征值 λ_0 的特征向量。

下面介绍控制理论中常用的凯勒-哈密顿 (Cayley-Hamilton) 定理。

若 n 阶方阵 \mathbf{A} 的特征多项式为 $f(\lambda)$ ，则有

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$$

在证明凯勒-哈密顿定理之前，先回顾一下 λ 矩阵的一个简单性质。

一个含有参变量 λ 的矩阵，称为 λ 矩阵。矩阵里 λ 的最高次数称为此 λ 矩阵的次数。如

$$\mathbf{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 + \lambda + 1 & \lambda^2 - \lambda + 3 \\ \lambda - 1 & \lambda^3 + \lambda^2 + 2 \end{bmatrix}$$

为三次二阶 λ 矩阵。

利用矩阵加减法的运算性质，上式可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda^3 + 0 \cdot \lambda^2 + \lambda + 1 & 0 \cdot \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 3 \\ 0 \cdot \lambda^3 + 0 \cdot \lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda^3 + \lambda^2 + 0 \cdot \lambda + 2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

一般地说，一个含有不超过 $n-1$ 次的 n 阶 λ 矩阵，总可以表示为

$$\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^{n-1} \mathbf{B}_1 + \lambda^{n-2} \mathbf{B}_2 + \cdots + \lambda \mathbf{B}_{n-1} + \mathbf{B}_n$$

由于

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{adj}[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]}{|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|} \stackrel{\text{def}}{\longrightarrow} \frac{\mathbf{B}\lambda}{|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (2.3.1)$$

式中

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

$\mathbf{B}(\lambda)$ 为 $n-1$ 次 λ 矩阵，可表示成

$$\mathbf{B}(\lambda) = \lambda^{n-1} \mathbf{B}_1 + \lambda^{n-2} \mathbf{B}_2 + \cdots + \lambda \mathbf{B}_{n-1} + \mathbf{B}_n$$

式 (2.3.1) 两边同乘以矩阵 $[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]$ ，得

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \mathbf{I} = \mathbf{B}(\lambda) [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

展开得

$$\mathbf{B}_1 \lambda^n + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{A}) \lambda^{n-1} + \cdots + (\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{A}) \lambda - \mathbf{B}_n \mathbf{A} = \mathbf{I} \lambda^n + a_{n-1} \mathbf{I} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{I} \lambda + a_0 \mathbf{I}$$

比较 λ 的系数，得

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 &= a_{n-1} \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_{n-1} \mathbf{A} + \mathbf{B}_n &= a_1 \mathbf{I} \\ -\mathbf{B}_n \mathbf{A} &= a_0 \mathbf{I} \end{aligned}$$

分别用 $\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1}, \cdots, \mathbf{A}, \mathbf{I}$ 右乘上式，然后相加得

$$\mathbf{O} = \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}$$

即

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$$

可见 $f(\lambda)$ 为矩阵 \mathbf{A} 的零化多项式，次数最低的零化多项式，称为 \mathbf{A} 的最小多项式，记为 $\psi(\lambda)$ 。

为了正确地掌握矩阵特征向量的求法，以下举例说明。

例 2.3.1 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 第一步, 写出矩阵 A 的特征矩阵

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

第二步, 令

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 为其特征值。

第三步, 求特征向量。对于 $\lambda_1 = 1$, 有

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

显然方程组系数矩阵的秩为 1, 有无穷多解, 其基础解向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

所以属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

同理, 对于 $\lambda_2 = 2$, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

对应的特征向量为

$$\zeta_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 2.3.2 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 第一步, 列出特征矩阵

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

第二步, 求特征值。令

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$$

得

$$\lambda_1 = -1 \text{ (二重根)}; \lambda_2 = 5$$

第三步, 求特征向量。对于 $\lambda_1 = -1$, 有

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵的秩为 1, 则方程组有两个线性无关的解向量组成该方程组的基础解系, 即有两个特征向量。

由方程得

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = 5$, 有

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵的秩为 2, 故对应的特征向量为

$$\zeta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 2.3.3 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 第一步, 列写特征矩阵

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

第二步, 求特征值。令

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

得

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

第三步, 求特征向量。对于 $\lambda_1 = i$, 有

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量为

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = -i$, 由

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量

$$\zeta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

例 2.3.4 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 第一步, 列出矩阵 A 的特征矩阵

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

第二步, 求特征值。令

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3 = 0$$

得

$$\lambda_1 = 2 \quad (\text{三重根})$$

第三步, 求特征向量。由 $\lambda_1 = 2$, 有

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系数矩阵的秩为 1, 故有两个线性无关的特征向量

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例 2.3.5 求对角阵 $A = \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。

解 第一步, 列出特征矩阵

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - a & & \\ & \lambda - b & \\ & & \lambda - c \end{bmatrix}$$

第二步, 求特征值。令

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = 0$$

得

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = b, \quad \lambda_3 = c$$

说明对角矩阵其对角线上的元素就是此对角阵的特征值。

第三步, 求特征向量。对于 $\lambda_1 = a$, 有

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & a-b & \\ & & a-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理可得

$$\zeta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从上几例可以看出:

(1) 若 ζ 是属于特征值 λ_0 的一个特征向量, 那么 $k\zeta$ 也是属于 λ_0 的特征向量, 这是因为

$$A(k\zeta) = \lambda_0(k\zeta)$$

说明了特征向量不是被特征值唯一所确定，相反，特征值却被特征向量所决定。

(2) 矩阵 A 的不同特征值所对应的特征向量是线性无关的。

(3) 矩阵 A 的同一个特征值（重根时）所对应的特征向量也是线性无关的。

综上两点，矩阵 A 的每一个特征值所对应的特征向量都是线性无关的。

(4) 矩阵 A 的重根特征值所对应的特征向量个数不一定与重根数相等，如例 2.3.4，且特征向量的个数不大于重根次数。

(5) 实对称阵的特征值一定是实数。

2.4 矩阵的相似变换

设有两个 n 阶方阵 A, B ，如果存在一个 n 阶可逆方阵 P ，使得 $B = P^{-1}AP$ ，则称方阵 B 与 A 是相似的，记作 $A \sim B$ 。也可以说方阵 B 是由方阵 A 施以相似变换而得来的。

相似矩阵有一些重要的运算性质。

$$(1) \quad P^{-1}(A_1 + A_2)P = P^{-1}A_1P + P^{-1}A_2P$$

$$(2) \quad P^{-1}(kA)P = kP^{-1}AP$$

$$(3) \quad P^{-1}(A_1A_2)P = P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P$$

$$P^{-1}(A^m)P = (P^{-1}AP)^m$$

(4) 若 $f(A)$ 为一矩阵多项式，则有

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP)$$

$$(5) \quad |P^{-1}AP| = |A|$$

$$(6) \quad \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(AP^{-1}P) = \text{tr}A$$

$$(7) \quad |\lambda I - A| = |\lambda I - P^{-1}AP|$$

注意：特征值相等，矩阵 A, B 不一定相似。例如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(8) \quad \text{rank}(P^{-1}AP) = \text{rank}A$$

以上说明，相似变换，矩阵的行列式值、迹、特征值和秩都不变。

对方阵 A 施以相似变换的目的是为了将其化为一些标准形式，以便揭示矩阵的内在属性和简化运算。

1. 化为对角标准型

方阵在满足一定条件下，可以通过相似变换化为对角矩阵。

(1) n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量，与其相似的对角阵主对角线上的元素除排列次序外是完全确定的，它们正是 A 的特征值（重根按重数计）。

(2) 若 A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定与如下对角阵相似：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

式中， λ_i 是 n 阶方阵 A 的特征值。

(3) 实对称方阵一定可对角化, 因其有 n 个线性无关的特征向量。

(4) 相似变换中的满秩阵 P 可由方阵 A 的特征向量构成。这也说明了, 将一个矩阵化为对角阵的问题, 实质上就是求此矩阵特征向量系的问题。

事实上, 若

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则

设

$$P = [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \cdots \quad \zeta_n]$$

那么有

$$AP = [A\zeta_1 \quad A\zeta_2 \quad \cdots \quad A\zeta_n] = [\lambda_1\zeta_1 \quad \lambda_2\zeta_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\zeta_n]$$

即

$$A\zeta_i = \lambda_i\zeta_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

说明 ζ_i 为 λ_i 的特征向量。

反过来, 如果 $P = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$, 其中 x_i 为 A 的特征值 λ_i 所对应的线性无关特征向量, 那么有

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

即

$$[Ax_1 \quad Ax_2 \quad \cdots \quad Ax_n] = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

或者

$$AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

综上所述, 说明矩阵 A 的对角化问题的确是求该矩阵的特征向量系的问题。

例 2.4.1 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 试将其对角化。

解:

第一步, 列写特征方程并求特征值。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

得

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$$

第二步, 求特征向量。对于 $\lambda_1 = 1$, 有

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2 = 4$, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量

$$\zeta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

第三步, 利用特征向量 ζ_1, ζ_2 作满秩矩阵 P 。

$$P = [\zeta_1 \quad \zeta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

则

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

对角阵

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 4 \end{bmatrix}$$

例 2.4.2 试讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 能否对角化。

解 因为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 = 0$$

故特征值为 $\lambda = 2$ (三重根), 而由

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其系数矩阵的秩为 1, 方程组仅有两个线性无关的特征向量, 小于矩阵 A 的阶次, 因此无法对角化。

2. 化为约当 (Jordan) 标准型

当矩阵特征向量的个数小于矩阵的阶次时, 通过相似变换可将其化为约当标准型。

(1) 约当块和约当标准型。形如

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}_{s \times s}$$

的方阵, 称为 s 级约当块。其中 λ_0 为复数。例如:

$$[a], \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

分别为 1, 2, 3 级约当块。

由一些约当块组成的准对角阵, 称为约当标准型。或者说, 约当标准型是由约当块的直和所构成的。

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

(2) 约当标准型存在定理

可以看出, 对角阵是约当标准型的一种特殊情况。因此有:

① 复数域上的任一 n 阶方阵 A 都可化为一个约当标准型。 A 的约当标准型除去其中约当块的排列次序外, 是被 A 唯一决定的。

② 复数域上的 n 阶方阵 A 的约当标准型 J 的主对角元恰好是 A 的特征值, 并且 J 的主对角线上的 A 的任一特征值出现的次数等于它的重根数。

(3) 利用初等因子化约当标准型

把一个方阵 A 化为约当标准型, 需要用到 λ 矩阵的一些知识, 在这里所谓现代控制理论基础 λ 矩阵, 即方阵的元素为 λ 的复系数多项式所构成。

a. λ 矩阵的不变因子和初等因子。

任一个 λ 矩阵都可以经过 λ 矩阵的初等变换使其成为对角阵。即

$$A(\lambda) \xrightarrow{\lambda \text{ 矩阵的初等变换}} \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & \\ & f_2(\lambda) & \\ & & \ddots \\ & & & f_k(\lambda) \end{bmatrix}$$

式中, $f_{i+1}(\lambda)$ 能被 $f_i(\lambda)$ 整除, 且规定各 $f_i(\lambda)$ 中 λ 的最高次项系数等于“1”, 以保证对角阵唯一。

λ 矩阵的初等变换法则如下:

- ① 互换 λ 矩阵的两行 (或两列)。
- ② 用一个不为零的数乘 $A(\lambda)$ 阵的一行 (或一列)。

③ 用一个 λ 的多项式乘 $A(\lambda)$ 的一行（或一列）加到另一行（或一列）上。

若方阵 $A(\lambda)$ 的元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$ （若等于0，可用互换行、列的办法用不等于0的元素代替0，成为 $a_{11}(\lambda)$ ），当 $a_{11}(\lambda)$ 不能遍除尽 $A(\lambda)$ 中所有元素时，通过 λ 矩阵的初等变换，逐渐降低 $a_{11}(\lambda)$ 的阶次，成为 $a_{11}^*(\lambda)$ ，直至 $a_{11}^*(\lambda)$ 可遍除尽经变换后 $A(\lambda)$ 中的所有元素，然后再通过 λ 矩阵初等变换可使第一行、第一列元素除 $a_{11}^*(\lambda)$ 外全为0，成为

$$\begin{bmatrix} a_{11}^*(\lambda) = f_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (n-1 \text{阶矩阵}) & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

用同样的办法，可得 $f_2(\lambda)$ ， $f_3(\lambda)$ 等。

由于对 $(n-1)$ 阶方阵施以 λ 初等变换不会改变 $f_1(\lambda)$ 遍除尽 $(n-1)$ 阶阵中所有元素的性质，因此必然有 $f_1(\lambda)$ 能除尽各 $f_i(\lambda)$ ， $f_2(\lambda)$ 可除尽除 $f_1(\lambda)$ 外的各 $f_i(\lambda)$ ，依次类推。

那么经初等变换后所得主对角线上的元素 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ 即为 $A(\lambda)$ 阵的不变因子，分别将 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ 分解为 λ 的不同次因式的幂积，就得到 $A(\lambda)$ 的初等因子。但应注意，由不同 $f_i(\lambda)$ 分解得到的相同因子的幂积不能合并。

例如 $f_1(\lambda) = (\lambda-1), f_2(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2), \dots$ 则初等因子为

$$(\lambda-1), (\lambda-1), (\lambda+2), \dots$$

所谓 $A(\lambda)$ 阵的不变因子，就是 $|A(\lambda)|$ 各阶子行列式的最大公因式顺序相除的商。这就是说 $f_1(\lambda)$ 是一阶子行列式的最大公因式， $f_2(\lambda)$ 是 $|A(\lambda)|$ 的二阶子行列式最大公因式被 $f_1(\lambda)$ 相除的商……因此 $|A(\lambda)|$ 的第 i 阶子行列式的最大公因式就是 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_i(\lambda)$ 的乘积。

例如，对

$$\begin{bmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

进行初等变换。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2) \text{列互换}} \begin{bmatrix} -6 & \lambda-4 & 0 \\ \lambda+5 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{(1)}{6}} \begin{bmatrix} -1 & \lambda-4 & 0 \\ \frac{\lambda+5}{6} & 3 & 0 \\ 1 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(2)+(1) \times (\lambda-4)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+5}{6} & \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{6} & 0 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1)+(3) \\ (2)+(1) \\ \times \frac{\lambda+5}{6} \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{6} & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\frac{-1 \times (1)}{6 \times (2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-1) \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(-1) \times (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(2) \rightarrow (3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

故不变因子为 $1, (\lambda-1), (\lambda-1)(\lambda+2)$

初等因子为 $(\lambda-1), (\lambda-1), (\lambda+2)$

事实上 $|A(\lambda)|$ 的一阶子式、二阶子式和三阶子式的最大公因式分别为 1 、 $(\lambda-1)$ 和 $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ 。

又如

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-a & \\ & \lambda-b \end{bmatrix}$$

其中 $a \neq b$ ，进行初等变换，有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda-a & \\ & \lambda-b \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)+1 \times (2)} \begin{bmatrix} \lambda-a & \lambda-b \\ & \lambda-b \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} \lambda-a & \lambda-b \\ \lambda-b & \lambda-b \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(2)-(1) \times \frac{\lambda-b}{a-b}} \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ \lambda-b & \frac{-(\lambda-a)(\lambda-b)}{a-b} \end{bmatrix} \xrightarrow{(1) \times \frac{1}{a-b}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda-b & \frac{-(\lambda-a)(\lambda-b)}{a-b} \end{bmatrix} \\ & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda-a)(\lambda-b) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故不变因子为 $1, (\lambda-a)(\lambda-b)$

初等因子为 $(\lambda-a), (\lambda-b)$

b. 初等因子对应的约当块。

很容易验证形如 $(\lambda - \lambda_i)^m$ 的初等因子，其所对应的约当块为

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m}$$

它的特征矩阵 $[\lambda I - J_i]$ 除常数“1”以外的不变因子和初等因子均为 $(\lambda - \lambda_i)^m$ 。而相似矩阵具有相同的不变因子，因此，具有 m 重特征值 λ_i 且只有一个特征向量的矩阵 A_i 可经相似变换成为约当块 J_i 。

c. 约当标准型对应的初等因子。

约当标准型可由不同约当块组成，每个字块对应一个初等因子，那么有多少个约当块就有多少个初等因子，也就有多少个特征向量，例如

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

对应的初等因子分别为 $(\lambda-2)^4$ ； $(\lambda-2), (\lambda-2)^3$ ； $(\lambda-2)^2, (\lambda-2)^2$ ； $(\lambda-2), (\lambda-2), (\lambda-2)^2$ ； $(\lambda-2), (\lambda-2), (\lambda-2)$ 和 $(\lambda-2)$ 。

尽管上述五个矩阵具有相同的特征值 $(\lambda-2)$ ，但它们的初等因子各不相同，所以它们之间是不能通过相似变换而相互转化的。

由于相似变换不改变矩阵的不变因子和初等因子，那么，若矩阵 A 的特征矩阵 $[\lambda I - A]$ 与另一个约当标准型 J 的特征矩阵 $[\lambda I - J]$ 具有相同的初等因子，则总可以通过相似变换把 $[\lambda I - A]$ 变成 $[\lambda I - J]$ ，即把 A 通过相似变换变成 J 。事实上，因为

$$P^{-1}[\lambda I - A]P = \lambda I - J$$

所以

$$P^{-1}AP = J$$

d. 化为约当标准型的步骤。

任何一个 n 阶方阵 A 经相似变换，总可以化为约当标准型，其步骤如下：

① 列出矩阵 A 的特征矩阵 $[\lambda I - A]$ ，得 λ 矩阵，进行 λ 矩阵初等变换，使之成为对角阵，并求其初等因子。

② 相应于每个初等因子，作出对应的约当块。

③ 把全部约当块直和成约当标准型。

例 2.4.3 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的约当标准型。

解 因为

$$[\lambda I - A] = A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

经初等变换，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

其初等因子为 $(\lambda-1)^2$ ， $(\lambda-2)$ 。

相应的约当块为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } [2]$$

所以， A 的约当标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 2.4.4 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 的约当标准型。

解 因为

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

经 λ 初等变换，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-4) \end{bmatrix}$$

其初等因子为

$$\lambda, \lambda-4$$

相应的约当块为

$$[0], [4]$$

所以, A 的约当标准型为

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ & 4 \end{bmatrix}$$

e. 求相似变换中的满秩阵 P 。

方阵 A 通过相似变换可化为约当标准型。在一般情况下, 如果只需找约当标准型, 就无须求 P 阵, 但是某些时候, 还必须求变换矩阵 P 。

由于

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即

$$AP = PJ$$

若将 P 改写为列向量形式

$$P = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n]$$

式中

$$\eta_i = \begin{bmatrix} \eta_{1i} \\ \eta_{2i} \\ \vdots \\ \eta_{ni} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

则有

$$A[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n] = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n] \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

利用分块矩阵乘法, 得

$$A\eta_1 = \lambda_i \eta_1 \quad \text{或} \quad [\lambda_i I - A]\eta_1 = 0$$

$$A\eta_2 = \eta_1 + \lambda_i \eta_2 \quad \text{或} \quad [\lambda_i I - A]\eta_2 = -\eta_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A\eta_n = \eta_{n-1} + \lambda_i \eta_n \quad \text{或} \quad [\lambda_i I - A]\eta_n = -\eta_{n-1}$$

由上面第一个等式知 η_1 是属于特征值 λ_i 的一个特征向量, 然后依次求解第二个到第 n 个等式的特征向量 η_2, \cdots, η_n (由于 $[\lambda_i I - A]^n = 0$, 故有此特征向量之说)。但应注意, 应适当选择 $-\eta_1, -\eta_2, \cdots, -\eta_{n-1}$ 等向量, 以使 $\text{rank}[\lambda_i I - A] = \text{rank}[\lambda_i I - A, -\eta_i]$, 否则线性方程组无解, 并且 η_i 的选择应使 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 之间线性无关。由于 P 是存在的, 所以用上述方法可以求得解, 但 P 值并不唯一。

例 2.4.5 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, 求使 $P^{-1}AP = J$ 的 P 。

解 第一步, 将 A 化为约当标准型。因为

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

经初等变换，有

$$\begin{bmatrix} -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & -(\lambda - 2) \\ 0 & -(\lambda - 2) & (\lambda - 2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & -(\lambda - 2) \\ 0 & -(\lambda - 2) & (\lambda - 2) \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda - 2) & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

其初等因子为

$$(\lambda - 2), (\lambda - 2)^2$$

所以，相应的约当标准型为

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第二步，令

$$P = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]$$

通过等式 $AP = PJ$ 得

$$[2I - A]\eta_1 = 0$$

$$[2I - A]\eta_2 = -\eta_1$$

$$[2I - A]\eta_3 = 0$$

对 $[2I - A]\eta_1 = 0$ ，得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

取

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对 $[2I - A]\eta_2 = -\eta_1$ ，有

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

得（若选 $\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，则 η_2 无法求出）

$$\eta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

对 $[2I - A]\eta_3 = 0$ ，同理可得

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对于一些简单的情况，例如二阶矩阵也可直接令

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PJ}$ ，根据矩阵中相应元素相等，可求得 $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ 等值。

例 2.4.6 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 4 \end{bmatrix}$ ，求 \boldsymbol{P} 。

解 设

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases} p_{11} + p_{21} = 0 \\ p_{12} = p_{22} \end{cases}$$

令

$$p_{11} = 1, p_{22} = 1$$

即

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5 二次型概念

定义：一个系数在实数域的 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{22}x_2^2 \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为实数域上的一个 n 元二次型。

上式中，若无交叉项，称为二次标准型。

可以看出，二次型都可以唯一地同 n 阶实对称矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

对应, 使得

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

在二次型理论中, 有一个很重要的变换关系—正交变换。其含义是: 若方阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} 满足如下关系:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$$

当 \mathbf{P} 为正交矩阵时, 则称这种变换关系为正交变换。否则称这种变换关系为合同变换。

由于这里 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, 因此正交变换一定是相似变换。但应该注意, 除了个别情况 (例如对于实对称矩阵) 外, 一般说来, 对方阵 \mathbf{A} 施以正交变换并不能将其变为对角标准型或约当标准型, 况且, 正交变换和相似变换应用场合是不同的, 两种变换矩阵的要求和构成是不一样的, 不能简单地用正交变换替代相似变换。

一个对称矩阵 \mathbf{A} 经正交变换后仍然是对称矩阵。这是因为

$$\mathbf{B}^T = [\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}]^T = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{B}$$

一个二次型所对应的实对称矩阵 \mathbf{A} 经正交变换可以变成对角阵, 即

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

式中, λ_i 为 \mathbf{A} 的特征值 (重根按重数计)。

此外, 通过配方法或初等行、列成对变换也可把矩阵变成对角阵。

下面继续讨论二次型的一些重要概念。

正定二次型: 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 如果对于任意一组不全为零的实数 c_1, c_2, \dots, c_n 都有

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$$

则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为正定二次型。有时也称相应实对称矩阵 \mathbf{A} 正定, 记为 $\mathbf{A} > 0$ 。

判别一个二次型是否为正定二次型, 除了按照定义进行识别外, 还可由二次型所对应的实对称阵 \mathbf{A} 的特征值是否全大于零或矩阵 \mathbf{A} 的所有顺序主子式全大于零来判定。

半正定二次型: 该二次型应满足关系式

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0 \quad (\mathbf{A} \geq 0)$$

与上述定义相反的有负定二次型和半负定二次型, 它们满足的关系式为

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) < 0 \text{ 和 } f(c_1, c_2, \dots, c_n) \leq 0$$

更一般地, 可以建立纯量函数 $f(\mathbf{x})$ 的正定性概念。所谓纯量函数是指函数值为纯量, 而自变量为向量, 如 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 那么实二次型就是纯量函数的一种特殊类型, 可以表示成如下形式:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

式中, \mathbf{A} 为实对称矩阵。

纯量函数的正定性是指: 对所有 $\mathbf{x} \neq 0$, 都有 $f(\mathbf{x}) > 0$, 仅当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $f(\mathbf{x}) = 0$, 则称该纯量函数 $f(\mathbf{x})$ 是正定的。

纯量函数的半正定性是指: 若除 $\mathbf{x} \neq 0$ 及某些点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 外, $f(\mathbf{x}) > 0$, 或者说, 对 $\mathbf{x} \neq 0$,

$f(\mathbf{x}) \geq 0$ ，则称该纯量函数 $f(\mathbf{x})$ 是半正定的。

例如：对于二维空间

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 && \text{是正定的} \\ f(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2)^2 && \text{是半正定的} \\ f(\mathbf{x}) &= x_1^2 - x_2^2 && \text{是不定的} \end{aligned}$$

2.6 矩阵的微分和积分

函数矩阵：设矩阵 \mathbf{A} 的每一个元素均是变量 t 的函数 $a_{ij}(t) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ ，则

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

称为函数矩阵。

函数矩阵的微分：把对函数矩阵的微分定义为对其每个元素进行微分，即

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}'(t) = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

同理，可定义 $\mathbf{A}''(t)$ 等。

微分性质：

$$(1) \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)] = \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] + \frac{d}{dt} [\mathbf{B}(t)]$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} [k\mathbf{A}(t)] = k \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] = \left\{ \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] \right\} k$$

式中， k 为常数。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{K}\mathbf{A}(t)] &= \mathbf{K} \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{K}] &= \left[\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] \right] \mathbf{K} \end{aligned}$$

式中， \mathbf{K} 为常数矩阵。

$$(3) \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \right] \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \frac{d}{dt} [\mathbf{B}(t)]$$

特别当 $\mathbf{B}(t) = f(t)$ 为数量函数，不是矩阵时，有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{A}(t)] &= f'(t)\mathbf{A}(t) + f(t) \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] \\ (4) \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{A}(f(t))] &= f'(t) \frac{d}{du} [\mathbf{A}(t)] \end{aligned}$$

式中， $u = f(t)$ 。

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{A}^{-1}(t) = -\mathbf{A}^{-1}(t) \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) \right] \mathbf{A}^{-1}(t)$$

证明：

由于
$$\frac{d}{dt} \mathbf{I} = \frac{d}{dt} [\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}] = \mathbf{A} \frac{d}{dt} \mathbf{A}^{-1} + \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A} \right] \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{O}$$

故
$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{A} \right] \mathbf{A}^{-1}$$

函数矩阵的积分：把函数矩阵的积分定义为对其每个元素的相应积分，即

$$\int_a^b \mathbf{A}(t) dt = \left[\int_a^b a_{ij}(t) dt \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

最后，还应注意，矩阵函数与函数矩阵是两个不同的概念。矩阵函数指的是自变量和函数都是矩阵的情况，如

$$f(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_m \mathbf{A}^m$$

将一般的函数 $f(\mathbf{x})$ 中的 \mathbf{x} 换成方阵 \mathbf{A} 就得到了相应的矩阵函数 $f(\mathbf{A})$ ，如

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k + \dots$$

就构成了矩阵级数。

工程上除了用到上述函数矩阵对数量变量求导法则外，还要用到函数矩阵以及矩阵函数的求导法则。

设 $f(\mathbf{x})$ 是变量 \mathbf{x} 的 $l \times p$ 阶矩阵函数，而 \mathbf{x} 又是 $m \times n$ 阶矩阵变量，即

$$f(\mathbf{x}) = [f_{gk}(\mathbf{x})]_{l \times p}, \quad \mathbf{x} = [x_{ij}]_{m \times n}$$

式中， $f_{gk}(\mathbf{x})$ 相当于一个纯量函数，则定义

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{f}{x_{11}} & \frac{f}{x_{12}} & \dots & \frac{f}{x_{1n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f}{x_{m1}} & \frac{f}{x_{m2}} & \dots & \frac{f}{x_{mn}} \end{bmatrix} = \left[\frac{f}{x_{ij}} \right]_{m \times n}$$

$$\frac{f}{x_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{f_{11}}{x_{ij}} & \frac{f_{12}}{x_{ij}} & \dots & \frac{f_{1p}}{x_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f_{l1}}{x_{ij}} & \frac{f_{l2}}{x_{ij}} & \dots & \frac{f_{lp}}{x_{ij}} \end{bmatrix}_{l \times p}$$

式中，

也就是说，首先按分母矩阵进行分块，写成 $m \times n$ 个分块矩阵，然后对每个子块按函数矩阵求导。

例如：当 $f(\mathbf{x})$ 为数值函数 $f(x)$ 时，则

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{f}{x_{11}} & \frac{f}{x_{12}} & \dots & \frac{f}{x_{1n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f}{x_{m1}} & \frac{f}{x_{m2}} & \dots & \frac{f}{x_{mn}} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

特别地，当 \mathbf{x} 为 n 维列向量时， $f(\mathbf{x})$ 为纯量函数，有

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{f}{x_1} & \frac{f}{x_2} & \dots & \frac{f}{x_n} \end{bmatrix}^T = \text{grad}f(\mathbf{x})$$

当 $f(\mathbf{x})$ 为行向量 $[f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ \dots f_m(\mathbf{x})]$, 而 \mathbf{x} 为 n 维列向量时, 有

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{f}{x_1} \\ \frac{f}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{f}{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_1} & \dots & \frac{f_m}{x_1} \\ \frac{f_1}{x_2} & \frac{f_2}{x_2} & \dots & \frac{f_m}{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{f_1}{x_n} & \frac{f_2}{x_n} & \dots & \frac{f_m}{x_n} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

等。

下面列出几个有用的微分公式。

对于 \mathbf{x} 为 n 维列向量时, 有

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{x}^T}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{x}^T}{x_1} \\ \frac{\mathbf{x}^T}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{x}^T}{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_1} & \frac{x_2}{x_1} & \dots & \frac{x_n}{x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} & \frac{x_2}{x_2} & \dots & \frac{x_n}{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{x_1}{x_n} & \frac{x_2}{x_n} & \dots & \frac{x_n}{x_n} \end{bmatrix}_{n \times n} = \mathbf{I}$$

同理 $\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}^T} = \mathbf{I}$, 可见

$$(2) \quad \frac{d(\mathbf{Ax})^T}{d\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T; \quad \frac{d(\mathbf{Ax})}{d\mathbf{x}^T} = \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} \text{ 为常数阵})$$

$$(3) \quad \frac{d(\mathbf{y}^T \mathbf{z})}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{y}^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{z} + \frac{d\mathbf{z}^T}{d\mathbf{x}} \mathbf{y}$$

式中, \mathbf{y}, \mathbf{z} 为 n 维列向量。

$$(4) \quad \frac{d(\mathbf{x}^T \mathbf{Ax})}{d\mathbf{x}} = 2\mathbf{Ax}$$

式中, \mathbf{A} 为实对称阵。

另外, 在应用复合函数求导法则时, 需注意乘积矩阵的相约性和顺序性。例如:

$$(1) \quad \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\mathbf{x}^T} \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{df}{d\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{y}^T}{d\mathbf{x}} \frac{df}{d\mathbf{y}}$$

$$(3) \quad \frac{df}{d\mathbf{x}^T} = \frac{df}{d\mathbf{y}^T} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}^T}$$

$$(4) \quad \frac{dz}{d\mathbf{x}^T} = \frac{dz}{d\mathbf{y}^T} \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}^T}$$

式中, \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} 均为 n 维列向量, f 为纯量函数。

2.7 利用 MATLAB 进行矩阵运算

前面已经介绍了矩阵的基本概念及基本运算, MATLAB 提供了许多函数, 可以用 MATLAB 对矩阵进行计算。

1. 矩阵的计算

例 2.7.1 试用 MATLAB 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ 之和。

解 MATLAB 命令如下:

```
>> a=[5 3 5;3 7 4;7 9 8];  
>> b=[2 4 2;6 7 9;8 3 6];  
>> a+b;
```

结果显示

```
ans =  
    7     7     7  
    9    14    13  
   15    12    14
```

例 2.7.2 试用 MATLAB 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ 的数组乘积。

解 MATLAB 命令如下:

```
>> a=[6 9 3;2 7 5];  
>> b=[2 4 1;4 6 8];  
>> a.*b;
```

结果显示

```
ans =  
   12   36     3  
    8   42   40
```

例 2.7.3 利用 MATLAB 计算矩阵 $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆。

解 MATLAB 命令如下:

```
>> A=[5 3 6;7 2 3;8 9 1];  
>> inv(A);
```

结果显示

```
ans =  
    -0.1202    0.2452   -0.0144  
    0.0817   -0.2067    0.1298  
    0.2260   -0.1010   -0.0529
```

2. 矩阵特征向量和特征值的计算

例 2.7.4 利用 MATLAB 求矩阵 A 的特征向量与特征值。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

解 MATLAB 命令如下：

```
>> A=[0 1 0;0 0 1; -6 -11 -6];  
>> [V,D]=eig(A);
```

结果显示

```
V =  
    -0.5774    0.2182   -0.1048  
     0.5774   -0.4364    0.3145  
    -0.5774    0.8729   -0.9435  
  
D =  
   -1.0000         0         0  
         0   -2.0000         0  
         0         0   -3.0000
```

故系统的特征向量为

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ 0.5774 \\ -0.5774 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0.2182 \\ -0.4364 \\ 0.8729 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} -0.1048 \\ 0.3145 \\ -0.9435 \end{bmatrix}$$

特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ 。

例 2.7.5 利用 MATLAB 求例 2.7.4 所示矩阵 A 的特征方程及其特征值。

解 MATLAB 命令如下：

```
>> A=[0 1 0;0 0 1; -6 -11 -6];  
>> P=poly(A),V=roots(P);
```

结果显示

```
P =  
    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000  
  
V =  
   -3.0000
```

-2.0000

-1.0000

故系统的特征值为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

特征方程为

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

3. 矩阵的变换

例 2.7.6 考虑下列系统的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 将其变换为对角线标准型。

解 由例 2.7.5 知系统的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ 。变换矩阵 P 根据范德蒙德矩阵可得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

MATLAB 命令如下：

```
>> A=[0 1 0;0 0 1; -6 -11 -6];B=[0;0;6];C=[1 0 0];D=0;  
>> P=inv([1 1 1; -1, -2, -3;1 4 9]);  
>> [A1,B1,C1,D1]=ss2ss(A,B,C,D,P);
```

结果显示

```
A1 =  
   -1.0000   -0.0000   -0.0000  
    0.0000   -2.0000    0.0000  
   -0.0000   -0.0000   -3.0000  
B1 =  
    3.0000  
   -6.0000  
    3.0000  
C1 =  
    1.0000    1.0000    1.0000  
D1 =  
    0
```

可得系统变化后的对角线标准型为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

思考题与习题

2.1 采用多种方法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆。

2.2 试证 $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ，其中 λ_i 为 A 的特征值。

2.3 设 $A = \text{diag}(1, -2, 1)$ ， $A^*BA = 2BA - 8E$ ，求 B 。

2.4 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解。

2.5 设 $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ， $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ ，求 $|A^8|$ 及 A^4 。

2.6 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。

2.7 设 A 是 3 阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，求矩阵 A 必有的特征向量。

2.8 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = P^{-1}A^*P$ ，求 $B + 2E$ 的特征值与特征向

量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵， E 为 3 阶单位矩阵。

2.9 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值有重根，判断矩阵 A 能否相似对角化，并说明

理由。

2.10 分别用初等因子法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ 的约当标准型，并求得使 $P^{-1}AP = J$ 的

P 。

2.11 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 分别用零化多项式法和相似变换法求 A^{100} 。

2.12 已知二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的秩为 2, $[2 \ 1 \ 2]^T$ 是 A 的特征向量, 求经正交变换二次型的标准型。

2.13 求使二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定的 t 的范围。

2.14 求函数矩阵 $A^3 \frac{dy}{dx}$ 的导数。

2.15 设函数矩阵 $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{bmatrix}$, 试求 $\frac{d}{dt} A$, $\frac{d^2}{dt^2} A$, $\frac{d}{dt} A^{-1}$ 。

第3章 系统的状态空间描述

经典控制理论以系统的输入、输出特性为研究依据，其模型仅仅描述系统输入、输出之间的外部特性，不能揭示系统内部各物理量的运动规律。20 世纪 60 年代，人们将状态空间的概念引入控制理论，产生了以状态空间描述为基础的现代控制理论。系统的状态空间描述不仅描述了系统输入、输出外部特性，而且揭示了系统内部的结构特性，能完全表征系统的所有动力学行为，因而是对系统的一种完全的描述。本章主要介绍线性系统状态空间描述的基本原理和组成方法。本章的内容包括状态和状态空间的概念，状态空间描述的组合方法和描述形式，状态空间描述的特性和变换等。

3.1 状态空间的基本概念

3.1.1 几个定义

(1) **状态**：控制系统的状态是指系统过去、现在和将来的状况。例如，由做直线运动的质点所构成的系统，它的状态就是质点的位置和速度。

(2) **状态变量**：系统的状态变量是指能完全表征系统运动状态的最小一组变量。所谓完全表征是指：

① 在任何时刻 $t = t_0$ ，这组状态变量的值 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 就表示系统在该时刻的状态；

② 当 $t \geq t_0$ 时的输入 $u(t)$ 给定，且上述初始状态确定时，状态变量能完全确定系统在 $t \geq t_0$ 时的行为。

状态变量组的最小性体现在：状态变量 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 是为完全表征系统行为所必需的最少个数的系统状态变量，减少变量个数将破坏表征的完整性，而增加变量个数将是完整表征系统行为所不需要的。

(3) **状态向量**：若一个系统有 n 个彼此独立的状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ，用它们作为分量所构成的向量 $\mathbf{x}(t)$ ，就称为状态向量，即

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

状态向量的选取不是唯一的，由于系统中变量的个数必大于 n ，而其中仅有 n 个是线性无关的，这就决定了状态向量选取上的不唯一性。任意选取的两个状态向量间为线性非奇异变换的关系。设 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{x}}(t)$ 为任意选取的两个状态向量：

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

则根据状态的定义可知, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 为线性无关, 因此可将 x_1, \dots, x_n 的每一个变量表示为 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 的线性组合, 且这种表示是唯一的。

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}\bar{x}_1 + \dots + p_{1n}\bar{x}_n \\ \vdots \\ x_n = p_{n1}\bar{x}_1 + \dots + p_{nn}\bar{x}_n \end{cases} \quad (3.1.3)$$

引入系数矩阵, 则上式可表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}} \quad (3.1.4)$$

式中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

同理, 由于 x_1, \dots, x_n 也为线性无关, 因此又有

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad (3.1.6)$$

从而由式 (3.1.4) 和式 (3.1.6) 可导出

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \mathbf{I} \quad (3.1.7)$$

表明 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 互为逆, 也即任意选取的两个状态向量 \mathbf{x} 和 $\bar{\mathbf{x}}$ 为线性非奇异变换关系。

(4) **状态空间**: 以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴构成的 n 维空间称为状态空间。系统在任何时刻的状态, 都可以用状态空间中一个点来表示。如果给定了初始时刻 t_0 时的状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 就得到状态空间中的一个初始点, 随着时间的推移, $\mathbf{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹, 称为状态轨迹。

(5) **状态方程**: 把系统的状态变量与输入之间的关系用一组一阶微分方程来描述的数学模型称之为状态方程。

(6) **状态空间表达式**: 状态方程和输出方程组合起来, 构成对一个系统动态行为的完整描述, 称为系统的状态空间表达式。

3.1.2 状态空间表达式的一般形式

(1) 状态空间描述

在引入了状态变量和状态空间概念的基础之上, 就可以来建立动力学系统的状态空间描述。从结构的角度的, 一个动力学系统可以用图 3.1 所示的方框图来表示, 其中 x_1, \dots, x_n 是表征系统行为的状态变量组, u_1, \dots, u_p 和 y_1, \dots, y_q 分别为系统的输入变量组和输出变量组, 箭头表示信号作用方向和部件变量组间的关系。

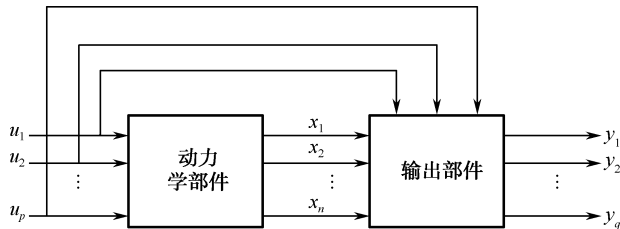


图 3.1 动力学系统

与输入输出描述不同, 状态空间描述中把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过

程, 输入引起系统状态的变化, 而状态和输入的变化则决定了输出的变化。

输入引起状态的变化是一个动态的过程, 数学上需采用微分方程或差分方程来表征, 并且称这个数学方程为系统的状态方程。就连续系统而言, 考虑最为一般的情况, 则其状态方程为非线性时变微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p, t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p, t), \end{cases} \quad t \geq t_0 \quad (3.1.8)$$

进而, 在引入向量表示的基础上, 还可将状态方程简洁地表示为向量方程的形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0 \quad (3.1.9)$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程, 描述这种转换关系的数学表达式称为系统的输出方程或量测方程。最为一般的情况下, 一个连续动力学系统的输出方程具有如下形式:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) \\ \vdots \\ y_q = g_q(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) \end{cases} \quad (3.1.11)$$

或表示为向量方程的形式

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.1.12)$$

式中

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (3.1.13)$$

系统的状态空间描述由状态方程和输出方程组成, 又称为系统的动态方程。当状态变量、输入变量和输出变量的个数增加时, 并不增加状态空间描述在表达式上的复杂性。

① 非线性系统的状态空间描述

在选定的一组状态变量下, 称一个系统为非线性系统, 当且仅当其状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

式中, 向量函数 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 的全部或至少一个组成元素为状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 和 u_1, u_2, \dots, u_p 的非线性函数。

② 线性系统的状态空间描述

若向量方程中 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 和 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ 的所有组成元素都是变量 x_1, \dots, x_n 和 u_1, \dots, u_p 的线性函数, 则称相应的系统为线性系统。而线性系统的状态空间描述可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

式中，各个系数矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q1}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(t) &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{q1}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见，系数矩阵 $\mathbf{A}(t)$ ， $\mathbf{B}(t)$ ， $\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 均为不依赖于状态 \mathbf{x} 和输入 \mathbf{u} 的矩阵。矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 表示了系统内部状态变量之间的联系，取决于被控系统的作用机理、结构和各项参数，称之为系统矩阵；输入矩阵 $\mathbf{B}(t)$ 表示各个输入变量如何控制状态变量，故亦称为控制矩阵；矩阵 $\mathbf{C}(t)$ 表示输出变量如何反映状态变量，称为输出矩阵或观测矩阵；矩阵 $\mathbf{D}(t)$ 则表示输入对输出的直接作用，称为直接传递矩阵。

③ 线性时变系统的状态空间描述

在状态空间表达式 (3.1.15) 中，一个动态系统的状态向量、输入向量和输出向量自然是时间 t 的函数，而矩阵 $\mathbf{A}(t)$ ， $\mathbf{B}(t)$ ， $\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 的各个元素如果与时间 t 有关，则称这种系统是线性时变系统，其状态空间描述即为式 (3.1.15)。

④ 线性定常系统的状态空间描述

在系统状态空间表达式 (3.1.15) 中，如果矩阵 $\mathbf{A}(t)$ ， $\mathbf{B}(t)$ ， $\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 的各个元素都是与时间 t 无关的常数，则称该系统为线性时不变系统 (Linear Time Invariant, LTI) 或线性定常系统，这时，状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

式中，各个系数矩阵为常数矩阵。

当系统的输出与输入无直接关系 (即 $\mathbf{D}=\mathbf{0}$) 时，称为惯性系统；相反，系统的输出与输入有直接关系 (即 $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$) 时，称为非惯性系统。大多数控制系统为惯性系统，所以，它们的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

⑤ 离散系统的状态空间描述

以上所讨论的系统中，不管是作用于系统的变量，还是表征系统状态的变量，都是时间 t 的连续变化过程。当系统的各个变量只在离散的時刻取值时，这种系统称为离散时间系统，简称离散系统。其状态空间描述只反映离散時刻的变量组之间的因果关系和转换关系。用 $k=0,1,2,\dots$ 来表示离散的時刻，那么离散系统状态空间描述的最一般形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{aligned} \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.1.18)$$

对于线性离散时间系统，则上述状态空间描述还可进一步化为如下形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.1.19)$$

⑥ 单输入单输出系统

在系统状态空间表达式 (3.1.15) 中, 当 $p=q=1$ 时, 系统为单输入单输出系统 (Single Input and Single Output, SISO)。输入变量 u 和输出变量 y 都是标量, $\mathbf{x}(t)$ 为 n 维状态向量, 所以各个矩阵相应的维数为: $\mathbf{A}(t)$ 是 $n \times n$ 方阵, $\mathbf{B}(t)$ 是 $n \times 1$ 列阵, $\mathbf{C}(t)$ 是 $1 \times n$ 行阵, 而 $\mathbf{D}(t)$ 是一个标量。

⑦ 多输入多输出系统

在系统状态空间表达式 (3.1.15) 中, 当 $p > 1, q > 1$ 时, 系统为多输入多输出系统 (Multi-Input and Multi-Output, MIMO), 这种系统也称为多变量系统。它有 p 个输入变量和 q 个输出变量, 输入变量 \mathbf{u} 和输出变量 \mathbf{y} 都是向量, $\mathbf{x}(t)$ 为 n 维状态向量, 所以各个矩阵相应的维数为: $\mathbf{A}(t)$ 是 $n \times n$ 方阵, $\mathbf{B}(t)$ 是 $n \times p$ 矩阵, $\mathbf{C}(t)$ 是 $q \times n$ 矩阵, 而 $\mathbf{D}(t)$ 是一个 $q \times p$ 矩阵。

3.1.3 状态空间表达式的系统方框图和状态变量图

式 (3.1.16) 为线性定常系统状态空间表达式的一般形式, 它不仅适用于多输入多输出系统, 当然也适用于单输入单输出系统。这种表示法的实质是把系统分成两部分, 如图 3.1 所示。与古典控制理论类似, 状态空间表达式也可用图 3.2 所示的方框图来表示。值得注意的是: 图中的信号传输线一般是表示列向量, 方框中的字母代表矩阵, 每一方框的输入输出关系规定为

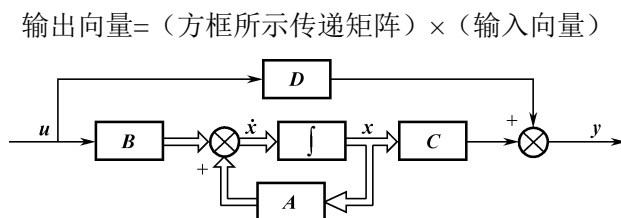


图 3.2 线性系统的方框图

在向量矩阵的乘法运算中, 顺序是不能颠倒的。

在状态空间分析中, 常以状态变量图来表示系统各变量之间的关系, 其来源出自模拟计算机的模拟结构图, 这种图为系统提供了一种物理图像, 有助于加深对状态空间概念的理解。

状态变量图的绘制步骤如下: 在适当的位置上画出积分器, 它的数目应等于状态变量数, 每个积分器的输出表示对应的状态变量, 在其上注明编号, 然后根据所写状态方程和输出方程画上加法器和放大器, 最后用直线把这些元件连接起来, 所用箭头表示出信号的传递方向。以下举例说明。

例 3.1.1 设一阶系统的状态方程是 $\dot{x} = ax + bu$, 则它的状态变量图如图 3.3 所示。

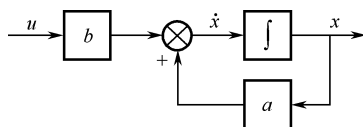


图 3.3 一阶系统的状态变量图

例 3.1.2 设有三阶系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3\end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u$$

$$y = x_1 + x_2$$

则它的状态变量图如图 3.4 所示。

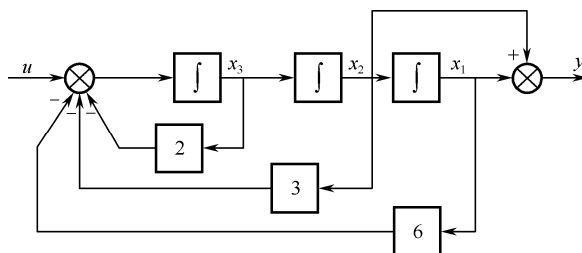


图 3.4 三阶系统的状态变量图

例 3.1.3 双输入双输出系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases}$$

则它的状态变量图如图 3.5 所示。

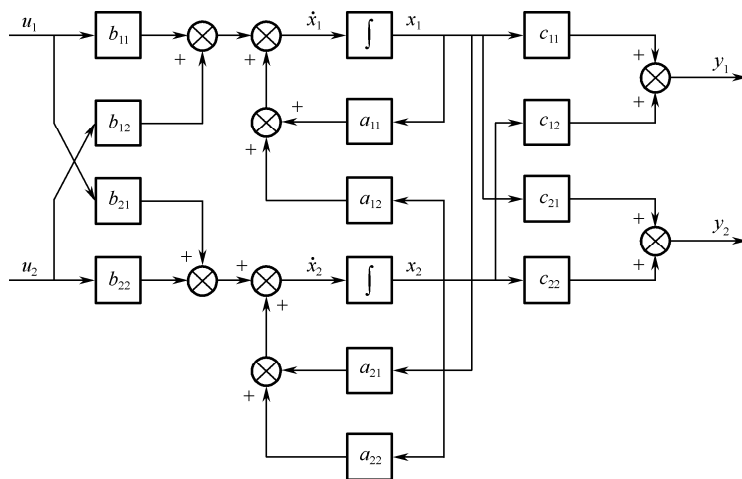


图 3.5 双输入双输出系统的状态变量图

3.2 状态空间表达式的建立

3.2.1 系统的状态空间的列写

建立在状态概念基础上的状态空间描述是现代控制理论的基础，状态空间描述除了能完整地描述系统性能外，还具有自身的性质。下面就一些简单的系统讨论其状态空间描述的列写问题，意在阐明状态空间描述的性质及列写系统状态方程和输出方程的一般步骤。

例 3.2.1 如图 3.6 所示 RLC 电路，输入变量取为电源电压 u ，输出变量取为电容两端电

压 u_C ，可以用两种状态变量列写其状态方程。

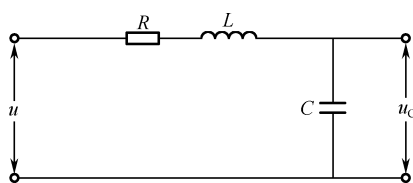


图 3.6 RLC 电路

解 首先确定状态变量：此电路为二阶系统，有两个储能元件，根据电路理论可知，此电路最多有两个线性无关的变量，可选独立储能元件的变量作为状态变量。

首先取电感电流 i 和电容电压 u_C 作为状态变量，根据电路原理，有下列微分方程组：

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u \quad (3.2.1)$$

$$C \frac{du_C}{dt} = i \quad (3.2.2)$$

令 $x_1 = u_C$ ， $x_2 = i$ ，则可导出状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \end{cases} \quad (3.2.3)$$

如取电容电压 u_C 作为输出变量 y ，则导出输出方程

$$y = u_C = x_1 \quad (3.2.4)$$

写成向量方程形式，则此电路的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

然后取状态变量 $\bar{x}_1 = L\dot{q} + Rq$ ， $\bar{x}_2 = q$ ， q 为电容的电荷量。由于 $q = Cu_C$ ，故有 $\dot{q} = C\dot{u}_C = i$ 。根据电路原理，有下列状态方程

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = L\ddot{q} + R\dot{q} = -u_C + u = -\frac{1}{C}q + u = -\frac{1}{C}\bar{x}_2 + u \\ \dot{\bar{x}}_2 = \dot{q} = \frac{1}{L}\bar{x}_1 - \frac{R}{L}\bar{x}_2 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

取电容电压 u_C 为输出变量 y ，则导出输出方程为

$$y = u_C = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C}\bar{x}_2 \quad (3.2.7)$$

写成向量方程形式，则此电路的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.2.8a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.8b)$$

通过以上例子，可归纳出几点结论：

① 状态变量的选取具有非唯一性。从上例可明显地看出，对同一个系统可以选择不同组的状态变量。这在以后的叙述中，读者将会更深刻地领会到。但是不管如何选择，状态变量的个数总是相同的。

② 动态方程或状态空间描述具有非唯一性。从上例可见，式（3.2.5）和式（3.2.8）两个动态方程不一样，但都是描写同一个 RLC 电路的性能。由于状态变量选择不同，则动态方程表示也不同，所以，在状态变量模式中，同一系统可以用不同的动态方程来描述，即系统的动态方程不是唯一的。如果将线性代数中坐标变换的概念用于动态方程的状态变换（相当于状态变量的选择），就可以把问题一般化。

假设状态变量为 \mathbf{x} ，系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

选择非奇异的 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{P} 作为坐标变换阵，并有

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{或} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$$

即 $\bar{\mathbf{x}}$ 同样是系统的状态变量，它与 \mathbf{x} 之间具有线性变换的关系，与此相应的系统的动态方程为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) \quad (3.2.9a)$$

$$= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{P}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \quad (3.2.9b)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$$

因为非奇异变换矩阵 \mathbf{P} 的选择不是唯一的，因此可以有无限多个状态向量及其相应的动态方程，也就是说动态方程不是唯一的，但它们都是描述同一系统的运动行为的。

③ 完全描述一个动态系统所需状态变量的个数由系统的阶次决定，状态变量必须是相互独立的。一个 n 阶系统具有 n 个独立变量，它的状态变量的个数应是 n 个，等于系统的阶次。

④ 一般来说，状态变量不一定是具有实际物理意义或可以测量的量，但是从工程实际的角度出发，总是选择物理上有意义或可测量的量作为状态变量，如电感中的电流、电容上的电压、电机的转速等。

从上例还可以总结出列写状态空间表达式的一般步骤：

第一步，确定输入变量和输出变量；

第二步，将系统划分为若干子系统，列写各子系统的微分方程；

第三步，根据各子系统微分方程的阶次，选择状态变量写成向量微分方程的形式，即可得到系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.2.10)$$

第四步，按照输出变量是状态变量的线性组合，写成向量代数方程的形式，即可得到输

出方程为

$$y = Cx + Du \quad (3.2.11)$$

控制系统按其属性有许多类型，如工程控制系统、社会控制系统等。以工程控制系统来说，又有电气、机械、液压、热力等系统之分。我们可以对不同的控制系统，根据其机理，即相应的物理定律来建立系统的状态方程；当指定系统的输出后，可以很容易写出系统的输出方程。这种根据系统内部的运动规律，直接推导其输入输出关系的建模方法称为机理分析法。

例 3.2.2 如图 3.7 所示，试求电枢电压控制的他励电动机的状态空间表达式。

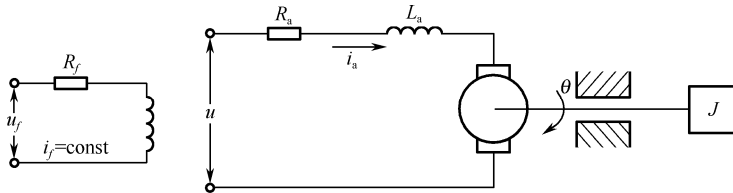


图 3.7 他励电动机原理图

解 本例包括电气系统及机械系统。假设选择 3 个状态变量，电机转轴角 θ 和转速 $\dot{\theta}$ 及电枢电流 i_a ，令 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = i_a$ ，根据该状态系统的物理规律列写运动方程。

由电压定律得

$$u = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + C_e \frac{d\theta}{dt}$$

由机械转矩平衡定律得

$$C_m i_a = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt}$$

此外还有

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

在以上式子中， C_e 和 C_m 是电动机电势常数和电磁转矩常数， f 为粘滞摩擦系数。

把这 3 个式子加以整理并带入状态变量，即可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{f}{J}x_2 + \frac{C_m}{J}x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{C_e}{L_a}x_2 - \frac{R_a}{L_a}x_3 + \frac{u}{L_a} \end{cases}$$

系统的输出方程为

$$y = \theta = x_1$$

写成向量方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{C_m}{J} \\ 0 & -\frac{C_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3.2.2 由高阶微分方程化为状态空间描述

本节讨论从描述系统输入-输出动态关系的高阶微分方程或传递函数出发建立与之等效的状态空间描述的问题，这样的问题称为实现。状态空间描述既保持原传递函数所特定的输入-输出关系，又将系统的内部结构确定下来，因此它是该传递函数的一种实现。然而根据输入-输出关系求得的状态空间描述不是唯一的，也就是会有许多个，理论上为无穷多个内部结构能够获得相同的输入-输出关系。

对于一个 n 阶线性常系数微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (3.2.12)$$

相应的传递函数为

$$W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3.2.13)$$

所谓实现问题，就是根据式 (3.2.12) 或式 (3.2.13) 求出等效的状态方程和输出方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

并非任意的微分方程或传递函数都能求得其实实现，可实现的条件是 $m \leq n$ 。

当 $m < n$ 时，式 (3.2.14) 的 \mathbf{D} 为标量， $D = 0$ 。

当 $m = n$ 时，可用长除法求得 \mathbf{D} 为标量， $D = b_m$ 。

传递函数式 (3.2.13) 化为 $b_m +$ 严格真分式，即

$$W(s) = b_m + \frac{(b_{m-1} - a_{n-1}b_m)s^{m-1} + \cdots + (b_1 - a_1b_m)s + (b_0 - a_0b_m)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

这意味着输出含有与输入直接关联的项。

应该指出下面两点：

(1) 从传递函数求状态空间描述不是唯一的，有无穷多的内部结构可以获得同一个传递函数，也就是说从式 (3.2.13) 求得的式 (3.2.14)，其中 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 可以取无穷多种形式。这就是实现的非唯一性。为了分析和设计上方便，通常规定几种标准型。下面将从传递函数化为几种标准型的实现问题分别予以介绍。

(2) 如果系统传递函数分子和分母没有公因子，即不出现零极点对消，则 n 阶系统必有 n 个独立变量，也必有 n 个一阶微分方程与之等效。通常把这种没有零极点对消的传递函数的实现称为最小实现，即在所有实现中，它的阶数最小。

第一种情形：传递函数中没有零极点时的实现

此时系统的微分方程为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3.2.15)$$

也就是输入函数不含有导数项，传递函数分子不含 s 项。下面介绍几种标准型实现。

① 标准 I 型

先看简单的二阶系统，其传递函数为

$$W(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.2.16)$$

选定状态变量 x_1, x_2 ，状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

对于 n 阶系统，由于式 (3.2.15) 仿效二阶系统，状态结构图如图 3.8 所示，这里选定状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 。

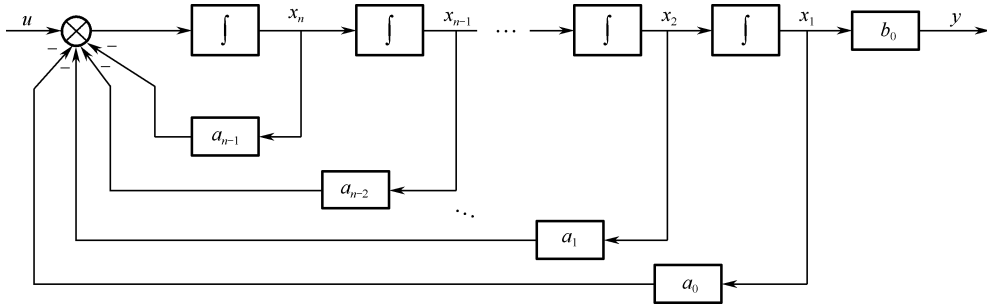


图 3.8 n 阶系统状态结构图

由图 3.8 得系统的状态方程和输出方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-2} x_{n-2} - a_{n-1} x_{n-1} + u \\ y &= b_0 x_1 \end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.17)$$

简记为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= [b_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

这种结构的特点是由各中间变量（即状态变量）到输入的负反馈构成的。顺便指出， \mathbf{A} 矩阵具有式 (3.2.17) 的形式时，称为友矩阵，友矩阵的特点是主对角线上方的元素为 1，最后一行的元素可为任意值，而其余一律为零。

凡是具有式 (3.2.17) \mathbf{A} 阵和 \mathbf{B} 阵形式的状态空间描述称为标准 I 型，而输出矩阵 \mathbf{C} 的元素可取任意值。

② 标准 II 型

标准 II 型与 I 型具有不同的结构。同样先看简单的二阶系统，式 (3.2.16) 可写为

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0} U(s)$$

进而

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = b_0U(s)$$

$$Y = s^{-2}b_0U - a_1s^{-1}Y - a_0s^{-2}Y \quad (3.2.18)$$

由式 (3.2.18) 画出状态结构图如图 3.9 所示。

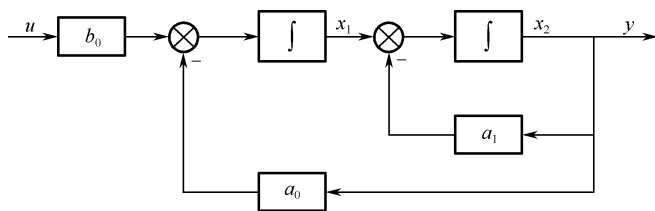


图 3.9 系统状态结构图

根据图 3.9 写出其状态空间描述

$$\dot{x}_1 = -a_0x_2 + b_0u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1x_2$$

$$y = x_2$$

即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x}$$

同理， n 阶系统的状态结构图如图 3.10 所示。

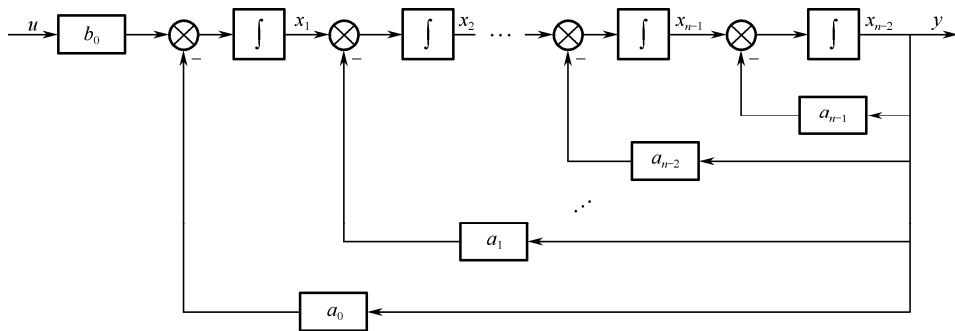


图 3.10 n 阶系统的状态结构图

此结构的特点是输出到各中间变量（即状态变量）的负反馈。根据图 3.10 直接写出其状态空间描述

$$\dot{x}_1 = -a_0x_n + b_0u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1x_n$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_{n-2}x_n$$

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n$$

$$y = x_n$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

简记为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

凡具有如式 (3.2.19) 的 (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 矩阵对, 即称为标准 II 型, 而 \mathbf{B} 阵的元素可以是任意值。比较标准 I 型的 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 阵和标准 II 型的 \mathbf{A} 、 \mathbf{C} 阵, 可以看出是互为转置的关系, 即

$$\mathbf{A}_{\text{II}} = \mathbf{A}_{\text{I}}^T, \quad \mathbf{C}_{\text{II}} = \mathbf{B}_{\text{I}}^T$$

式中, \mathbf{A}_{I} 、 \mathbf{B}_{I} ——标准 I 型的 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} ;

\mathbf{A}_{II} 、 \mathbf{C}_{II} ——标准 II 型的 \mathbf{A} 、 \mathbf{C} 。

通常称这种关系为互为对偶的关系, 这点在第 5 章中还将进一步讨论。

③ 约当标准型

标准 I 型和标准 II 型都是直接从微分方程或传递函数出发建立的, 下面介绍如何把传递函数展开成部分分式来求其状态空间描述。

传递函数的分母的 n 次方程为系统特征方程, 它的根为特征根, 即系统的极点, 有两种情况, 一种是所有根是互异的, 即只有单根, 另一种是有些根是相同的, 即有重根。

情况一: 单根的情况

此时传递函数式 (3.2.15) 写成

$$W(s) = \frac{b_0}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \quad (3.2.20)$$

式中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为互异的特征根。

将式 (3.2.20) 展开成部分分式

$$W(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

则输出

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s) \quad (3.2.21)$$

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) W(s) \quad (3.2.22)$$

式中, c_i 为在相应极点 λ_i 处的留数。

根据式 (3.2.21) 可以画出状态结构图, 并选定其状态变量 $x_i (i=1, 2, \cdots, n)$, 如图 3.11 所示。

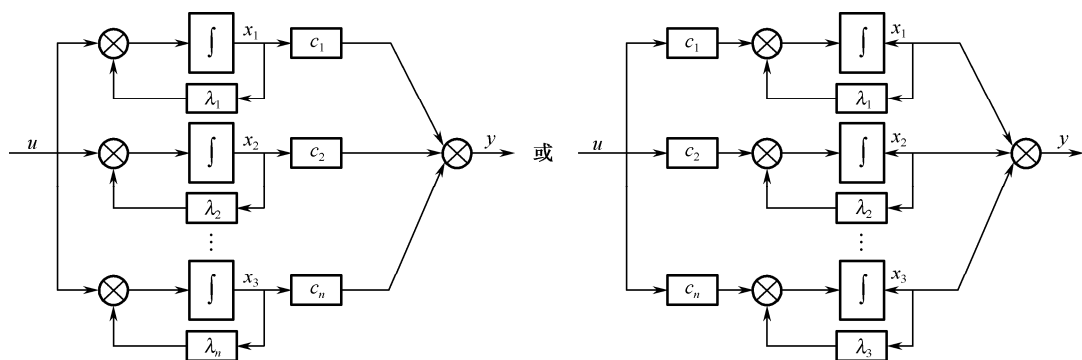


图 3.11 系统状态结构图

注意这种结构，不再是前述的将积分器串联的形式，而是采取积分器并联的结构形式。根据图 3.11 分别写出其状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.23)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u \quad (3.2.24)$$

$$y = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \mathbf{x}$$

式 (3.2.23) 和式 (3.2.24) 也是互为对偶的。由上两式可见，系统矩阵 \mathbf{A} 是对角线阵，对角线上各元素是系统的互异特征根，故称为对角线标准型，它是属于约当标准型的一种特殊形式。

情况二：有重根的情况

为简单明了起见，设只有一个重根，且重数为 q (对有多个重根，可类推)，此时，式 (3.2.15) 可写成

$$W(s) = \frac{b_0}{(s - \lambda_1)^q (s - \lambda_{q+1}) \cdots (s - \lambda_n)}$$

式中， λ_1 是 q 重根， $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_n$ 是单根，于是 $W(s)$ 展开成部分分式为

$$W(s) = \frac{c_{1q}}{(s - \lambda_1)^q} + \frac{c_{1(q-1)}}{(s - \lambda_1)^{q-1}} + \cdots + \frac{c_{12}}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_{11}}{(s - \lambda_1)} + \sum_{i=q+1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

式中， $c_i (i = q+1, q+2, \dots, n)$ 的计算公式同前。

而

$$c_{1q} = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} (s - \lambda_1)^q W(s)$$

$$c_{1(q-1)} = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{d}{ds} [(s - \lambda_1)^q W(s)]$$

\vdots

$$c_{1(q-j)} = \frac{1}{j!} \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{d^j}{ds^j} [(s - \lambda_1)^q W(s)] \quad (j = 1, 2, \dots, q-1)$$

$$Y(s) = \frac{c_{11}}{s - \lambda_1} U(s) + \frac{c_{12}}{(s - \lambda_1)^2} U(s) + \dots + \frac{c_{1(q-1)}}{(s - \lambda_1)^{q-1}} U(s) + \frac{c_{1q}}{(s - \lambda_1)^q} U(s) + \sum_{i=q+1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s)$$

得状态结构图如图 3.12 所示。

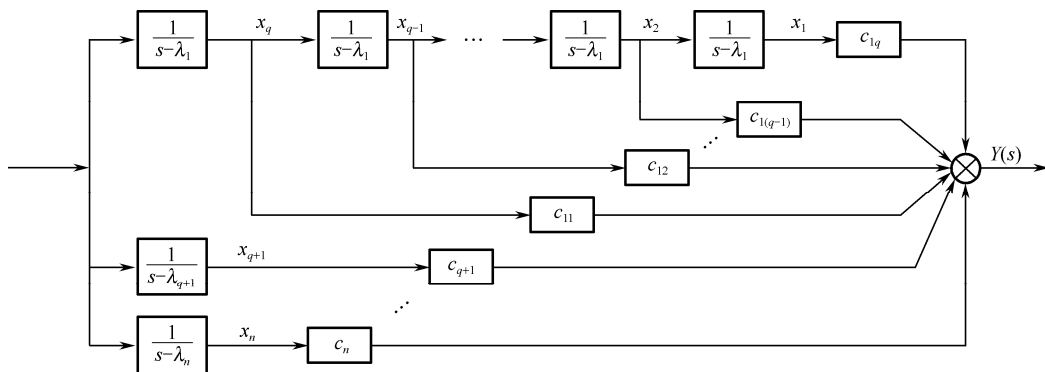


图 3.12 系统状态结构图

由图 3.12 看出，重根部分为积分器串联形式，单根部分均为积分器并联。不难写出其状态空间描述

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} \\ \dot{x}_q \\ \hline \dot{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_{q+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ \hline x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

简记为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \begin{bmatrix} c_{1q} & c_{1(q-1)} & \cdots & c_{12} & c_{11} & | & c_{q+1} & \cdots & c_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

矩阵 \mathbf{A} 的特点：主对角线上的元素是特征根，主对角线下面的元素均为零，当有重根时，则紧靠对角线上面的元素为 1，其余均为零，这种矩阵称为约当标准型。矩阵 \mathbf{A} 对应于重根的部分，如式 (3.2.25) 的虚线所划分的左上块则称为约当块。

例 3.2.3 设系统的微分方程为

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 14y = 3u$$

试求它的标准 I 型、II 型及对角线标准型的实现，并画出相应的状态结构图。

解 系统相应的传递函数为

$$W(s) = \frac{3}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

(1) 标准 I 型

根据式 (3.2.17) 直接求得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

状态结构图如图 3.13 所示。

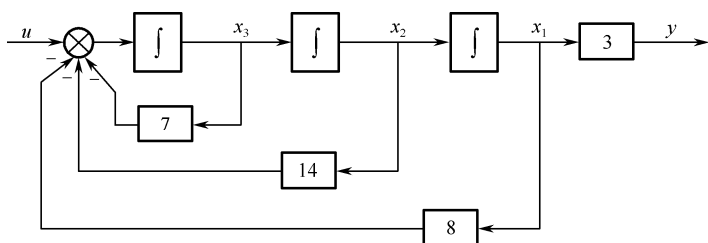


图 3.13 系统状态结构图

(2) 标准 II 型

由式 (3.2.19) 直接得

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

状态结构图如图 3.14 所示。

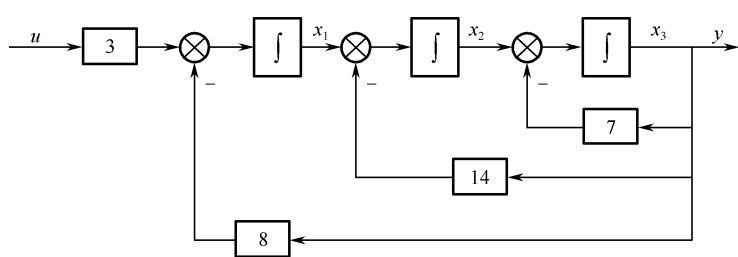


图 3.14 系统状态结构图

(3) 对角线标准型

传递函数化成

$$W(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+4}$$

据计算留数的公式 (3.2.22), 有

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)W(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3}{(s+2)(s+4)} = 1$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)W(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3}{(s+1)(s+4)} = -\frac{3}{2}$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4)W(s) = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{3}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2}$$

于是

$$W(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{s+4}$$

据此得状态结构图（见图 3.15）和状态空间描述

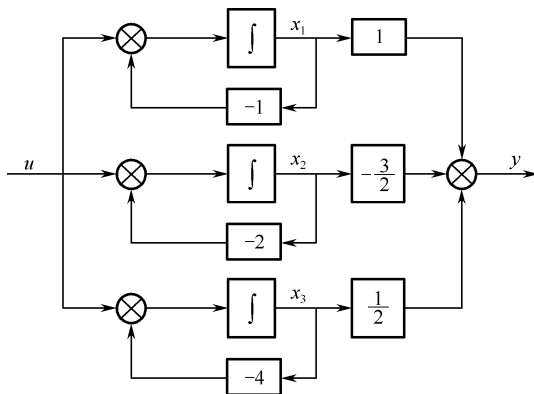


图 3.15 系统状态结构图

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

第二种情形：传递函数有零点时的实现

此时，系统的微分方程为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0\dot{u}$$

相应的传递函数为

$$W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3.2.26)$$

在这种包含输入函数导数情况下的实现问题，与前述实现的不同点在于选取合适的结构，使得状态方程中不含输入信号的导数项。同样，有下面几种标准型实现。

(1) 标准 I 型

对于传递函数有零点的系统，其实现的标准 I 型又分两种形式，即能控 I 型和能观测 I 型，能控和能观测的具体意义将在第 5 章中加以叙述。

情况一：能控 I 型

为了说明方便，这里以三阶系统为例，找出其实现规律，然后推广至 n 阶系统。

设系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad n = m = 3 \quad (3.2.27)$$

因为 $n=m$ ，故上式可变为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} b_3 + \frac{(b_2 - a_2 b_3)s^2 + (b_1 - a_1 b_3)s + (b_0 - a_0 b_3)}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.2.28)$$

引入中间变量 $Y_1(s)$ ，且令

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} U(s)$$

则

$$Y(s) = b_3 U(s) + Y_1(s) [(b_2 - a_2 b_3)s^2 + (b_1 - a_1 b_3)s + (b_0 - a_0 b_3)]$$

对上式求拉氏反变换，得

$$y = b_3 u + (b_2 - a_2 b_3) \ddot{y}_1 + (b_1 - a_1 b_3) \dot{y}_1 + (b_0 - a_0 b_3) y_1$$

据此可得系统的状态结构图如图 3.16 所示。

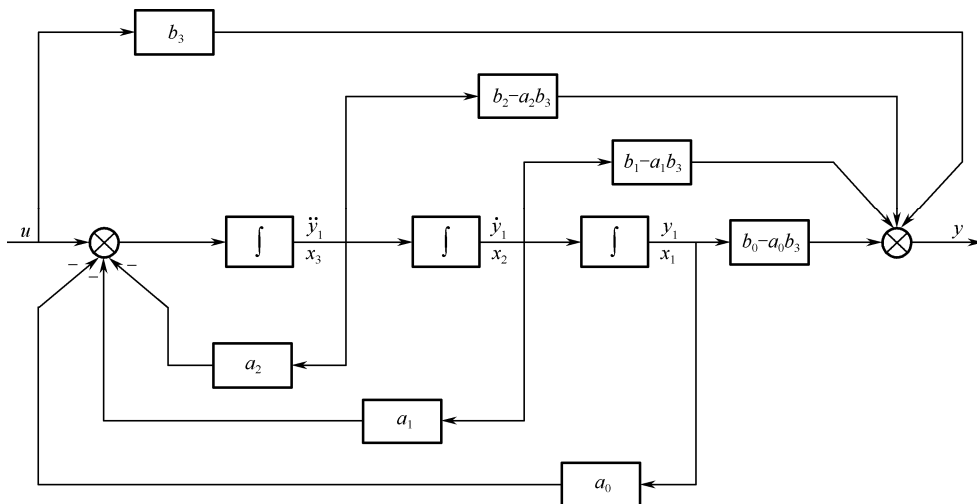


图 3.16 系统的状态结构图

在选定了状态矢量 $x(t)$ 后（见图 3.16），可得系统的状态空间描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [(b_0 - a_0 b_3) \quad (b_1 - a_1 b_3) \quad (b_2 - a_2 b_3)] \mathbf{x} + b_3 u$$

当 $b_3=0$ ，即 $m=n-1$ 时，输出方程为

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] \mathbf{x}$$

推广到 n 阶系统，式 (3.2.26) 的实现，可以为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.29)$$

$$y = [(b_0 - a_0 b_n) \quad (b_1 - a_1 b_n) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - a_{n-1} b_n)] \mathbf{x} + b_n u$$

此即能控 I 型的实现，与传递函数没有零点实现中的标准 I 型（式 (3.2.17)）比较，它们的状态方程是相同的，所不同的只是输出方程。注意到实现的规律，很容易根据式 (3.2.29)，由传

递函数中分子分母多项式的系数，写出系统的能控 I 型的状态空间描述。

情况二：能观测 I 型（能观测性标准型）

这里仍以 3 阶系统为例，对式 (3.2.28) 给出的传递函数，引入中间变量 $M(s)$ ，且令

$$M(s) = [(b_2 - a_2 b_3)s^2 + (b_1 - a_1 b_3)s + (b_0 - a_0 b_3)]U(s)$$

于是

$$Y(s) = b_3 U(s) + M(s) \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

上式右边第二项相当于没有零点的系统， $M(s)$ 作为输入变量。可画出系统的框图如图 3.17 所示，从图中可见，导数出现在输入线上，设法移过适量的积分器，以消去微分器，变成如图 3.18 所示的等效框图。现在的问题是如何求取系数 β_0 、 β_1 、 β_2 、 β_3 。

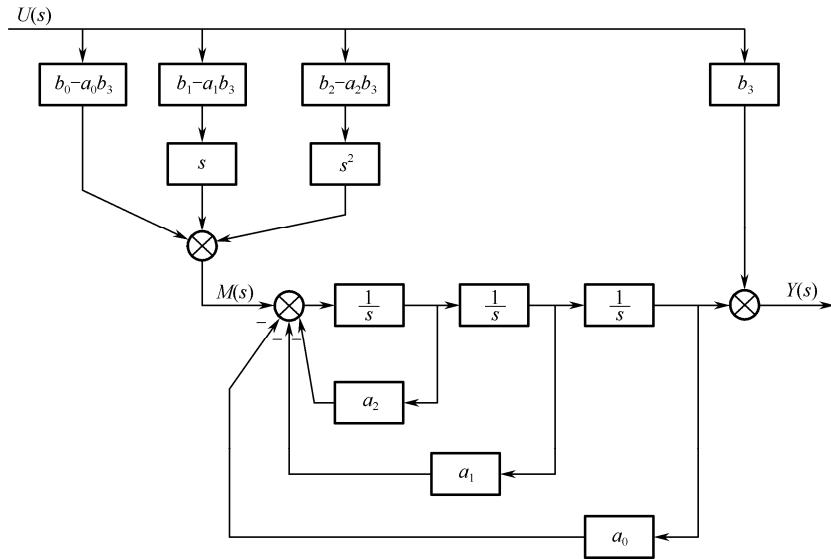


图 3.17 系统的框图

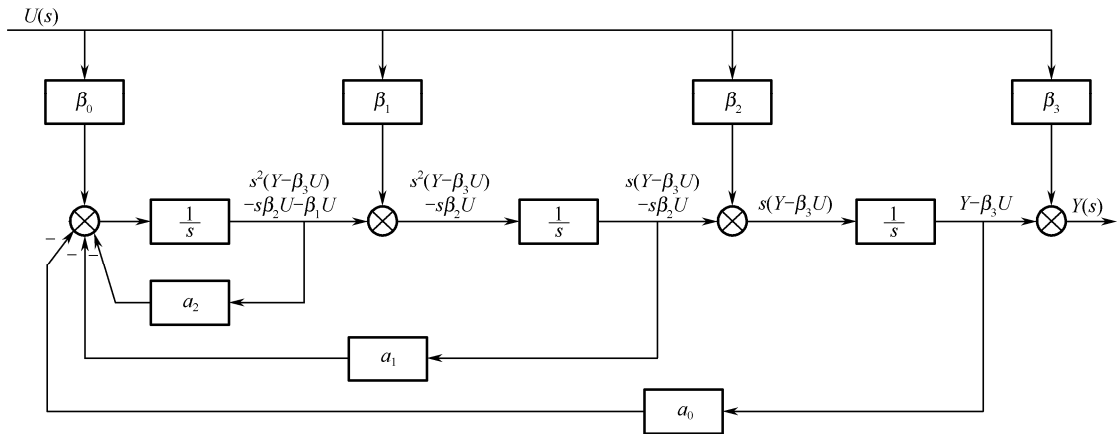


图 3.18 系统等效框图

由等效框图 3.18，得

$$\left\{ \left\{ \beta_0 U - a_2 [s^2 Y - (s^2 \beta_3 + s \beta_2 + \beta_1) U] - a_1 [s Y - (s \beta_3 + \beta_2) U] - a_0 (Y - \beta_3 U) \right\} \frac{1}{s} + \beta_1 U \right\} \frac{1}{s} + \beta_2 U \left\{ \frac{1}{s} + \beta_3 U = Y(s) \right.$$

整理之，得

$$(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = [\beta_3s^3 + (a_2\beta_3 + \beta_2)s^2 + (a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + \beta_1)s + \beta_0 + a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + a_0\beta_3]U(s)$$

写成传递函数形式为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_3s^3 + (a_2\beta_3 + \beta_2)s^2 + (a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + \beta_1)s + (a_0\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + \beta_0)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

与原方程式 (3.2.28) 比较，即可得到

$$\begin{aligned}\beta_3 &= b_3 \\ a_2\beta_3 + \beta_2 &= b_2 \\ a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + \beta_1 &= b_1 \\ a_0\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + \beta_0 &= b_0\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}\beta_3 &= b_3 \\ \beta_2 &= b_2 - a_2\beta_3 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_3 - a_2\beta_2 \\ \beta_0 &= b_0 - a_0\beta_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1\end{aligned}$$

写成下式，以便记忆

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

把框图 (见图 3.18) 画成时域的状态结构图，并选定状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ ，如图 3.19 所示，得系统的状态空间描述

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} + \beta_3 u\end{aligned}$$

当 $b_3 = 0$ 时，输出方程为

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

推广到 n 阶系统，式 (3.2.26) 的能观测 I 型的实现为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u \quad (3.2.30)$$

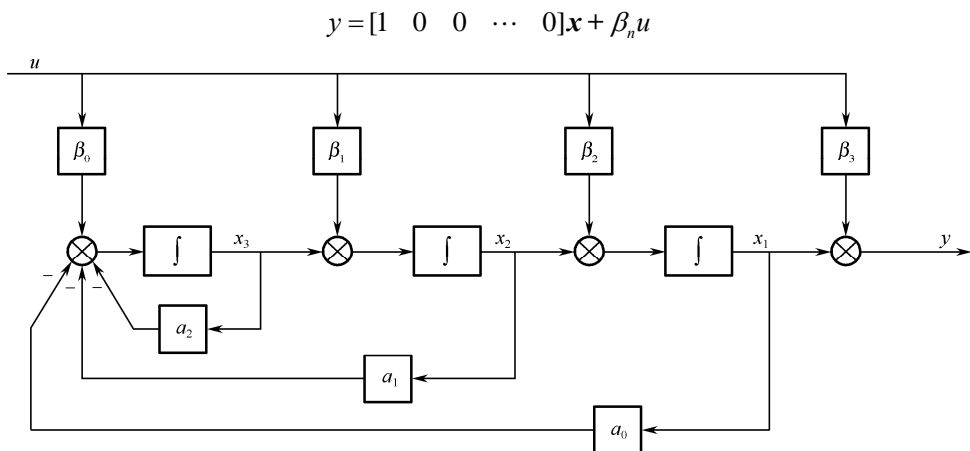


图 3.19 系统状态空间框图

其中

$$\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ a_0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

与没有零点实现中的标准 I 型（式（3.2.17））比较，只有输入矩阵不同。可见，传递函数不含零点和含零点的标准 I 型实现，其系统矩阵 \mathbf{A} 是一致的，含零点的能控 I 型与不含零点的标准 I 型实现的不同仅为输出矩阵 \mathbf{C} 不同，能观测 I 型则为输入矩阵 \mathbf{B} 不同。

（2）标准 II 型

同样，分为能控 II 型和能观测 II 型，下面分别加以介绍。

情况一：能控 II 型（能控性标准型）

采用与传递函数不含零点的标准 II 型的基本结构，同时采用能控 I 型的变换方法，得能控 II 型的状态结构图如图 3.20 所示（这里仍以 3 阶系统为例）。

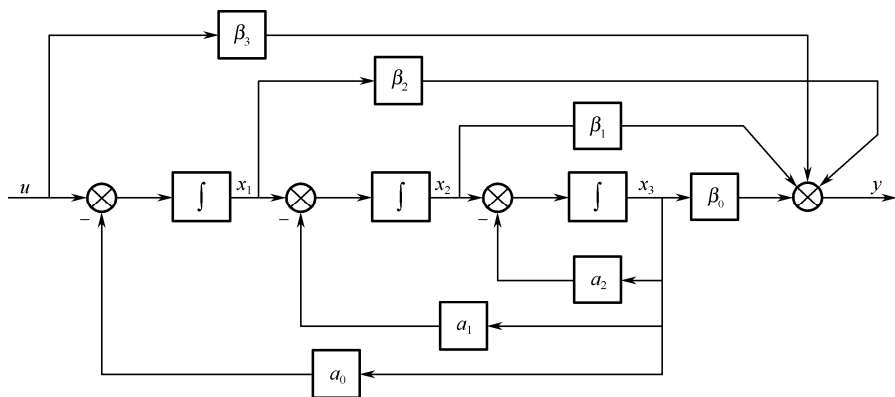


图 3.20 能控 II 型的状态结构图

相应的能控 II 型状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\beta_2 \quad \beta_1 \quad \beta_0] \mathbf{x} + \beta_3 u$$

显见，能控 II 型是能观测 I 型的对偶形式。读者可自行推广到 n 阶系统。

情况二：能观测 II 型（观测器标准型）

同理，得能观测 II 型的状态结构图（见图 3.21）和状态空间描述式（3.2.31）。

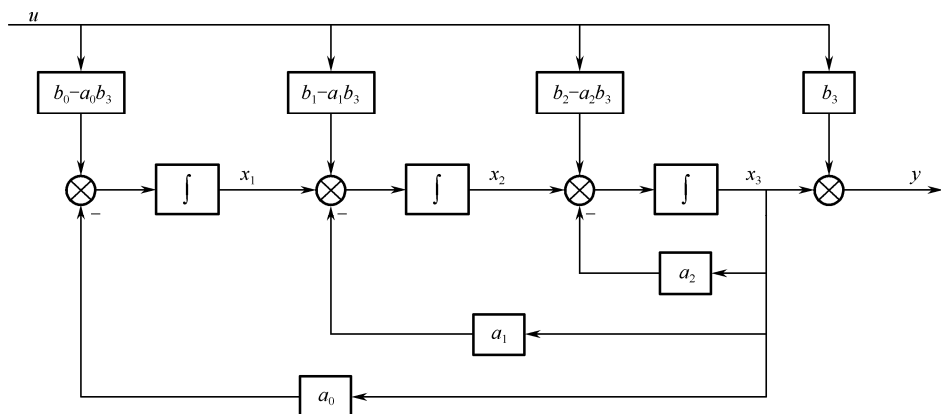


图 3.21 能观测 II 型的状态结构图

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_3 \\ b_1 - a_1 b_3 \\ b_2 - a_2 b_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} + b_3 u \quad (3.2.31)$$

该能观测 II 型是能控 I 型的对偶式。即能控 I 型与能观测 II 型互为对偶，而能控 II 型与能观测 I 型互为对偶。由于采用相同的基本结构，所以能控 I 型、能观测 I 型与传递函数不含零点时的标准 I 型的系统矩阵 \mathbf{A} 相同，而能控 II 型、能观测 II 型与标准 II 型的系统矩阵 \mathbf{A} 相同。

(3) 约当标准型

传递函数包含零点的约当标准型实现与传递函数不含零点时相应的实现形式完全一样，因为当传递函数展开成部分分式时，零点的存在仅仅影响各相应极点的留数而已。

例 3.2.4 系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{4s^2 + 17s + 16}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

试分别写出它的能控 I 型、能观测 I 型、能控 II 型和能观测 II 型。

解 (1) 能控 I 型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -16 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [16 \quad 17 \quad 4] \mathbf{x}$$

(2) 能观测 I 型

首先计算

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 16 & 7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 33 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \\ 29 \end{bmatrix}$$

则得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -16 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \\ 29 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(3) 能控 II 型

为能观测 I 型的对偶型, 即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -17 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [4 \quad -11 \quad 29] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(4) 能观测 II 型

为能控 I 型的对偶型, 即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -17 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 4 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

3.2.3 由传递函数建立状态空间表达式

从传递函数建立状态空间表达式的方法之一是把传递函数转化为微分方程, 然后再采用前面所介绍的方法求得状态空间表达式。当然也可由传递函数直接写出来, 这是属于现代控制理论中的实现问题, 将在第 5 章中讨论。这里介绍 3 种简单的方法: 直接分解法、串联分解和并联分解。介绍之前先讨论下面一个问题。

对于实际物理系统, 传递函数的分子多项式的次数总是要小于或等于分母多项式的次数的, 即

$$\bar{W}(s) = \frac{\bar{b}_0 s^m + \bar{b}_1 s^{m-1} + \cdots + \bar{b}_{m-1} s + \bar{b}_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.2.32)$$

式中, $m \leq n$ 。当 $m=n$ 时, 可以用长除法将上式改写为

$$\bar{W}(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} + \bar{b}_0 = g(s) + d \quad (3.2.33)$$

式中, $W(s)$ 的分子次数低于分母的次数, 称为严格真分式传递函数, 而 $d = \bar{b}_0$ 。由此可以看出, 只有当传递函数的分子次数等于分母次数时, 才会有输入与输出间的直接传递项, 在一般情况下, d 将等于零。

(1) 直接分解

设 n 阶系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.2.34)$$

将上式的分子分母同除以 s^n ，可得输出函数 $Y(s)$ 为

$$Y(s) = U(s) \frac{b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} + b_n s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}} \quad (3.2.35)$$

令中间变量

$$E(s) = U(s) \frac{1}{1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}}$$

或

$$E(s) = U(s) - a_1 s^{-1} E(s) - a_2 s^{-2} E(s) - \cdots - a_n s^{-n} E(s) \quad (3.2.36)$$

可得

$$Y(s) = b_1 s^{-1} E(s) + b_2 s^{-2} E(s) + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} E(s) + b_n s^{-n} E(s) \quad (3.2.37)$$

根据式 (3.2.36) 和式 (3.2.37) 可画出系统模拟结构图 (见图 3.22)。

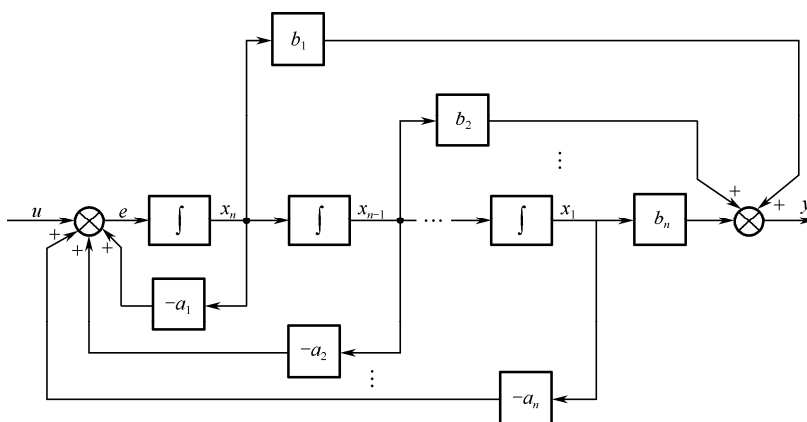


图 3.22 系统模拟结构图

选择各个积分环节的输出作为系统的状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n ，于是状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.38a)$$

$$y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.2.38b)$$

(2) 串联分解

串联分解适用于传递函数已知被分解为因式相乘的形式，如

$$W(s) = \frac{b_1(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{n-1})}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (3.2.39)$$

式中, p_1, p_2, \dots, p_n 和 z_1, z_2, \dots, z_{n-1} 分别为系统的极点和零点。

以一个三阶传递函数为例子予以说明。设

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1(s-z_2)(s-z_3)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} \\ &= \frac{b_1}{(s-p_1)} \frac{(s-z_2)}{(s-p_2)} \frac{(s-z_3)}{(s-p_3)} \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

显然, 这个系统可以看作是 3 个一阶系统串联而成, 其模拟结构图如图 3.23 所示。

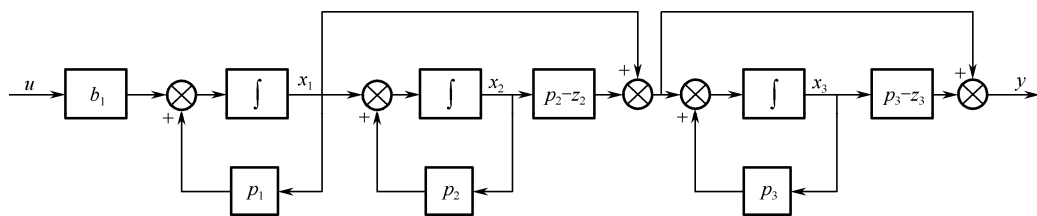


图 3.23 系统模拟结构图

若指定图 3.23 中每个积分环节的输出为状态变量, 则系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = x_1 + p_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + (p_2 - z_2) x_2 + p_3 x_3 \\ y = x_1 + (p_2 - z_2) x_2 + (p_3 - z_3) x_3 \end{cases}$$

写成向量方程形式, 则有状态空间描述:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 1 & p_2 & 0 \\ 1 & p_2 - z_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad p_2 - z_2 \quad p_3 - z_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(3) 并联分解

把传递函数展开成部分分式也是求取状态空间表达式的常用方法, 现分两种情况讨论。

① 传递函数的极点两两相异的情况

假设传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.2.41)$$

式中, $Y(s)$ 为系统输出, $U(s)$ 为系统输入, $N(s)$ 为分子多项式, $D(s)$ 为分母多项式。 $D(s)$ 可以分解为

$$D(s) = (s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) \quad (3.2.42)$$

在 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 互不相同的情况下, 传递函数可以展开成

$$W(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n} \quad (3.2.43)$$

式中

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) W(s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.44)$$

所以有

$$Y(s) = \frac{c_1}{s-p_1} U(s) + \frac{c_2}{s-p_2} U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n} U(s) \quad (3.2.45)$$

选择状态变量的拉氏变换式为

$$X_i(s) = \frac{1}{s-p_i} U(s), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.46)$$

将上式整理，并进行拉氏反变换，可得状态方程为

$$\dot{x}_i(t) = p_i x_i(t) + u(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.47)$$

再将式 (3.2.46) 代入式 (3.2.45)，有

$$Y(s) = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \cdots + c_n X_n(s) \quad (3.2.48)$$

对上式整理，并求拉氏反变换，可得输出方程

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \quad (3.2.49)$$

将状态方程式 (3.2.47) 和输出方程式 (3.2.49) 写成向量方程形式，有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.50a)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.2.50b)$$

它的模拟结构图如图 3.24 所示，由图可见，显然是并联结构。

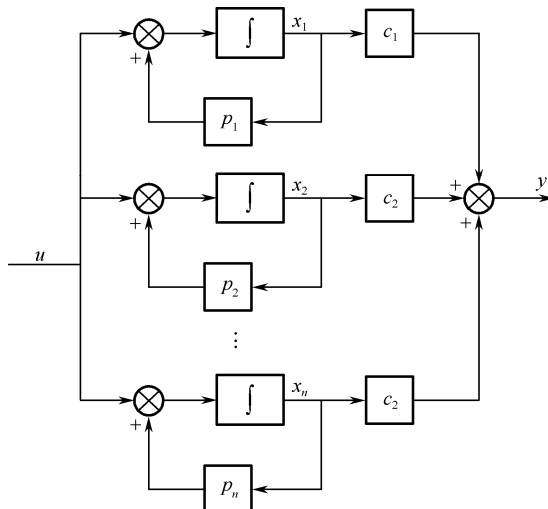


图 3.24 系统模拟结构图

在这种表达式中，状态方程的系统矩阵 \mathbf{A} 是对角矩阵，对角线上各元素是它的特征值，也就是系统传递函数的极点。也称这种形式为对角标准型。

② 传递函数具有重极点的情况

为简便起见，先只设一个重根，重数为 γ ，则其传递函数的部分分式展开式为

$$W(s) = \frac{c_{11}}{(s-p_1)^r} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{c_{1r}}{(s-p_1)} + \frac{c_{r+1}}{(s-p_{r+1})} + \cdots + \frac{c_n}{(s-p_n)} \quad (3.2.51)$$

式中，单极点对应的系数 $c_i (i=r+1, \dots, n)$ 仍按照式 (3.2.44) 计算，而 γ 重极点对应的系数 $c_{1j} (j=1, 2, \dots, r)$ 则按下式计算

$$c_{1j} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \{(s-p_1)^r W(s)\}, \quad j=1, 2, \dots, r \quad (3.2.52)$$

选择状态变量的拉氏变换为

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{U(s)}{(s-p_1)^r} \\ X_2(s) = \frac{U(s)}{(s-p_1)^{r-1}} \\ \vdots \\ X_r(s) = \frac{U(s)}{(s-p_1)} \\ X_{r+1}(s) = \frac{U(s)}{(s-p_{r+1})} \\ \vdots \\ X_n(s) = \frac{U(s)}{(s-p_n)} \end{cases} \quad (3.2.53)$$

由此可得

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s-p_1} X_2(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s-p_1} X_3(s) \\ \vdots \\ X_{r-1}(s) = \frac{1}{s-p_1} X_r(s) \\ X_r(s) = \frac{1}{(s-p_1)} U(s) \\ X_{r+1}(s) = \frac{1}{s-p_{r+1}} U(s) \\ \vdots \\ X_n(s) = \frac{1}{s-p_n} U(s) \end{cases} \quad (3.2.54)$$

将以上各式化成状态变量的一阶方程组，则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = p_1 x_2 + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_r = p_1 x_r + u \\ \dot{x}_{r+1} = p_{r+1} x_{r+1} + u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + u \end{cases} \quad (3.2.55)$$

输出方程的拉氏变换为

$$Y(s) = c_{11}X_1(s) + c_{12}X_2(s) + \cdots + c_{1r}X_r(s) + c_{r+1}X_{r+1}(s) + \cdots + c_nX_n(s) \quad (3.2.56)$$

对上式进行拉氏反变换就能得到输出方程为

$$y(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \cdots + c_{1r}x_r(t) + c_{r+1}x_{r+1}(t) + \cdots + c_nx_n(t) \quad (3.2.57)$$

将状态方程和输出方程写成向量方程的形式，则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_r \\ \dot{x}_{r+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & & & & \\ & p_1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ \text{-----} & & & p_1 & & \\ & & & & p_{r+1} & \ddots \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.58)$$

$$y = [c_{11} \quad c_{12} \quad \cdots \quad c_{1r} \quad c_{r+1} \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.2.59)$$

可以看出，状态空间表达式中， A 阵具有约当型，称为约当（Jordan）标准型。

例 3.2.5 设系统传递函数为 $W(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^3 - 6s^2 + 12s - 8}$ ，试求其状态空间表达式。

解 因为分母为三重根 $D(s) = s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = (s-2)^3$ ，于是部分分式展开为

$$W(s) = \frac{c_{11}}{(s-2)^3} + \frac{c_{12}}{(s-2)^2} + \frac{c_{13}}{(s-2)}$$

由式 (3.2.32) 得

$$c_{11} = \lim_{s \rightarrow 2} (s - p_i)^3 W(s) = \lim_{t \rightarrow 2} (2s^2 + 5s + 1) = 19$$

$$c_{12} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} [(s - p_i)^3 W(s)] = \lim_{t \rightarrow 2} (4s + 5) = 13$$

$$c_{13} = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^2}{ds^2} [(s - p_i)^3 W(s)] = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4}{2!} = 2$$

因此系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [19 \quad 13 \quad 2] \mathbf{x}$$

至于系统传递函数同时具有单极点和重极点的情况,若假定 p_1, p_2, \dots, p_k 为单极点, p_{k+1} 为 l_1 重极点, p_{k+m} 为 l_m 重极点, 且 $k + l_1 + \dots + l_m = n$ 成立, 则可直接列写出约当标准型的状态空间表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \hline \dot{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{k+l_1} \\ \hline \dot{x}_{k+l_1+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{k+l_1+l_2} \\ \hline \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & & & & & \\ & p_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & p_k & & \\ \hline & & & & \boxed{\begin{matrix} p_{k+1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} p_{k+m} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \end{matrix}} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & p_{k+m+l_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+l_1} \\ \hline x_{k+l_1+1} \\ \vdots \\ x_{k+l_1+l_2} \\ \hline \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.2.60)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_k & | & c_{k+1,1} & \cdots & c_{k+1,l_1} & | & \cdots & | & c_{k+m,1} & \cdots & c_{k+m,l_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.2.61)$$

3.3 状态空间描述转化为传递函数

前面已经介绍数学模型具有两种模式,一种是输入输出模式,它包括微分方程和传递函数;另一类是状态变量模式,即状态空间描述。同一系统的两种不同模式的数学模型之间存在着内在的联系,并且可以相互转换。

3.3.1 由状态空间描述求传递函数

本节介绍从状态空间描述求传递函数的问题,从而建立状态空间描述与输入-输出描述之间的相互关系。

(1) 求传递函数

对单输入单输出系统,已知其状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

式中, \mathbf{x} 为 n 维状态矢量; y 、 u 为输出和输入, 且都是标量; \mathbf{A} 为 $n \times n$ 方阵; \mathbf{B} 为 $n \times 1$ 列阵; \mathbf{C} 为 $1 \times n$ 行阵; D 为标量, 一般为零。

对式 (3.3.1) 进行拉氏变换, 并假定初始条件为零, 则有

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

移项整理

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \quad (3.3.2)$$

同时

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \quad (3.3.3)$$

式中, \mathbf{I} 为单位矩阵。

把式 (3.3.2) 代入式 (3.3.3), 得

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + DU(s)$$

于是, 得传递函数

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

为一标量。

当 $D=0$ 时, 得常用公式

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.3.4)$$

对多输入多输出系统, 其传递函数

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

为一矩阵。当输入矢量 \mathbf{u} 为 r 维, 输出矢量 \mathbf{y} 为 m 维时, 则传递函数阵 $\mathbf{W}(s)$ 为 $m \times r$ 矩阵。

例 3.3.1 已知单变量系统的状态空间描述

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 2] \mathbf{x} \end{aligned}$$

求它的传递函数。

解 根据传递函数的计算公式 (3.3.4), 求得

$$\begin{aligned} W(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{[1 \quad 2] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} \end{aligned}$$

从上例可见, 必须求矩阵的逆, 下面再举一个三阶系统的例子。

例 3.3.2 三阶系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

求 $W(s)$ 。

解 先计算

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

式中, $\text{adj}(\cdot)$ ——adjoint, 伴随矩阵, $\text{adj}\mathbf{A}$ 的各元素是 \mathbf{A} 相应元素的代数余子式;
 $\det(\cdot)$ ——determinant, 行列式, 这里 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 即矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式。

于是

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 & 1 \\ -5 & s(s + 2) & s \\ -5s & -(3s + 5) & s^2 \end{bmatrix}$$

则传递函数

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 2s + 3}{2s^3 + 4s^2 + 6s + 10}$$

(2) $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 的法捷耶夫算法

由上面例子可以看到, 求 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ 时, 对分子分母都必须进行行列式计算, n 越大, 计算越麻烦, 下面介绍的法捷耶夫算法可避免行列式的计算。

矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式用 $\psi(s)$ 表示, 可写成

$$\psi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_0$$

$$\text{于是} \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} [\mathbf{F}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{F}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \mathbf{F}_0] \quad (3.3.5)$$

式中的 a_i 、 $\mathbf{F}_i (i = n-1, n-2, \cdots, 0)$ 可用下面的公式求得

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n-1} &= \mathbf{I}, & a_{n-1} &= -\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_{n-1}) \\ \mathbf{F}_{n-2} &= \mathbf{A}\mathbf{F}_{n-1} + a_{n-1}\mathbf{I}, & a_{n-2} &= -\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_{n-2}) \\ \mathbf{F}_{n-3} &= \mathbf{A}\mathbf{F}_{n-2} + a_{n-2}\mathbf{I}, & a_{n-3} &= -\frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_{n-3}) \\ &\vdots & & \vdots \\ \mathbf{F}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{F}_2 + a_2\mathbf{I}, & a &= -\frac{1}{n-1}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_1) \\ \mathbf{F}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{F}_1 + a_1\mathbf{I}, & a_0 &= -\frac{1}{n}\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_0) \end{aligned}$$

式中, $\text{tr}(\cdot)$ ——Trace, 矩阵的迹, 表示括号内矩阵的对角线元素之和。

证明 把式 (3.3.5) 写成

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{F}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{F}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \mathbf{F}_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

消去分母得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0) = \mathbf{F}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{F}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \mathbf{F}_0$$

等式两边同时左乘 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, 则变为

$$\begin{aligned} (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)\mathbf{I} &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{F}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{F}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \mathbf{F}_0) = \\ &= \mathbf{F}_{n-1}s^n + (\mathbf{F}_{n-2} - \mathbf{A}\mathbf{F}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (\mathbf{F}_0 - \mathbf{A}\mathbf{F}_1)s + (-\mathbf{A}\mathbf{F}_0) \end{aligned}$$

比较等号两边各项系数得

$$\begin{aligned}
 s^n: \quad & \Gamma_{n-1} = I \\
 s^{n-1}: \quad & \Gamma_{n-2} - A\Gamma_{n-1} = a_{n-1}I, \text{ 即 } \Gamma_{n-2} = A\Gamma_{n-1} + a_{n-1}I = A + a_{n-1}I \\
 s^{n-2}: \quad & \Gamma_{n-3} = A\Gamma_{n-2} + a_{n-2}I = A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I \\
 & \vdots \\
 s: \quad & \Gamma_0 = A\Gamma_1 + a_1I = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I \\
 s^0: \quad & 0 = A\Gamma_0 + a_0I = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0I
 \end{aligned}$$

即 $\Psi(A)=0$, 表示特征多项式 $\Psi(s)$ 的 s 代之 A 后得到零矩阵。

至此, $\Gamma_i (i=n-1, n-2, \cdots, 0)$ 的求解公式得证, 而 $a_i (i=n-1, n-2, \cdots, 0)$ 公式的证明较繁复, 这里从略。

例 3.3.3 上例的 $(sI - A)^{-1}$ 用法捷耶夫方法求之。

解 由

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

计算

$$\Gamma_2 = I, \quad a_2 = -\text{tr}A = 2$$

$$\Gamma_1 = A\Gamma_2 + a_2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\text{tr}A\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$\Gamma_0 = A\Gamma_1 + a_1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{1}{3}\text{tr}A\Gamma_0 = -\frac{1}{3}\text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} = 5$$

于是得

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\Gamma_2 s^2 + \Gamma_1 s + \Gamma_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 & 1 \\ -5 & s^2 + 2s & s \\ -5s & -3s - 5 & s^2 \end{bmatrix}$$

结果与前面一样。

3.3.2 组合系统的状态空间描述和传递函数矩阵

由两个或两个以上子系统连接构成的系统称为组合系统。基本组合方式分为并联、串联和反馈三种类型。一个较为复杂的系统总是包含若干种典型连接方式的一个组合系统。本节针对线性时不变系统和上述三类基本组合方式，讨论相应组合系统的状态空间描述和传递函数矩阵。

1. 子系统的并联

并联是组合系统中最为简单的一种组合方式。考察图 3.25 所示的由两个线性时不变子系统经并联构成的组合系统 Σ_p ，子系统的状态空间描述和传递函数矩阵表示为

$$\Sigma_i: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i \end{cases}, \quad i=1,2 \quad (3.3.6)$$

和

$$\mathbf{W}_i(s), \quad i=1,2 \quad (3.3.7)$$

不难看出，两个子系统可以实现并联的条件是，子系统在输入维数和输出维数上满足关系式：

$$\dim(\mathbf{u}_1) = \dim(\mathbf{u}_2), \quad \dim(\mathbf{y}_1) = \dim(\mathbf{y}_2) \quad (3.3.8)$$

其中， $\dim(\cdot)$ 表示向量的维数。并联组合系统在变量关系上的特征为

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{y} \quad (3.3.9)$$

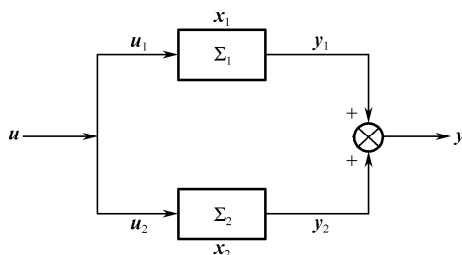


图 3.25 子系统的并联

在此基础上，对并联组合系统可得出如下结论。

(1) 并联系统的状态空间描述

对两个线性时不变子系统 (3.3.6) 的并联组合系统 Σ_p ，取组合状态为 $[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]^T$ ，则 Σ_p 的状态空间描述为

$$\Sigma_p: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2] \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.3.10)$$

证明 基于子系统的描述 (3.3.6)，并考虑到 Σ_1 与 Σ_2 的内部独立性， Σ_1 与 Σ_2 的互不影响性，以及并联系统的特征 (3.3.9)，可以导出：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

基于组合状态 $[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^T$ ，将式 (3.3.11) 表示为组合系统的状态方程和输出方程，就可得到式 (3.3.10)。证明完成。

对 N 个线性时不变子系统的并联组合系统 Σ_p ，取组合状态为 $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]^T$ ，则 Σ_p 的状态空间描述为

$$\begin{aligned} \Sigma_p: \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C}_1 \ \cdots \ \mathbf{C}_N] \mathbf{x} + [\mathbf{D}_1 + \cdots + \mathbf{D}_N] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

(2) 并联系统的传递函数矩阵

对两个线性时不变子系统的并联组合系统 Σ_p ，表示子系统的传递函数矩阵为 $\mathbf{W}_1(s)$ 和 $\mathbf{W}_2(s)$ ，则 Σ_p 的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_1(s) + \mathbf{W}_2(s) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{W}_i(s) \quad (3.3.13)$$

对 N 个线性时不变子系统的并联组合系统 Σ_p ，表示子系统的传递函数矩阵为 $\mathbf{W}_1(s), \mathbf{W}_2(s), \dots, \mathbf{W}_N(s)$ ，则 Σ_p 的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}(s) = \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i(s) \quad (3.3.14)$$

证明 利用并联系统的特征 (3.3.9)，可以得到

$$\hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{W}_1(s) + \mathbf{W}_2(s)] \hat{\mathbf{u}} \quad (3.3.15)$$

基此，即证得式 (3.3.13)。类似地，也可证明式 (3.3.14)。证明完成。

2. 子系统的串联

串联是组合系统中另一类重要和简单的组合方式。考察图 3.26 所示的由两个线性时不变子系统按照 “ $\Sigma_1 - \Sigma_2$ ” 顺序构成的串联组合系统 Σ_r ，子系统的状态空间描述和传递函数矩阵分别为：

$$\begin{aligned} \Sigma_i: \quad \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad i=1,2 \quad (3.3.16)$$

和

$$\mathbf{W}_i(s), \quad i=1,2 \quad (3.3.17)$$

不难看出，两个子系统可以实现串联的条件是，子系统在输入维数和输出维数上满足关系式：

$$\dim(\mathbf{y}_1) = \dim(\mathbf{u}_2) \quad (3.3.18)$$

其中 $\dim(\cdot)$ 表示向量的维数。串联组合系统在变量关系上的特征为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{y} \quad (3.3.19)$$

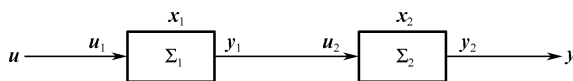


图 3.26 子系统的串联

在此基础上，对串联组合系统可得出如下结论。

(1) 串联系统的状态空间描述

对两个线性时不变子系统 (3.3.16) 按 “ $\Sigma_1 - \Sigma_2$ ” 顺序构成的串联组合系统 Σ_T ，取组合状态为 $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$ ，则 Σ_T 的状态空间描述为：

$$\Sigma_T: \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + (\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1) \mathbf{u} \quad (3.3.20)$$

证明 基于子系统的描述 (3.3.16)，并考虑到 Σ_1 与 Σ_2 的内部独立性， Σ_1 不受 Σ_2 的影响，以及串联系统的特征 (3.3.19)，就可导出：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

进而，基于组合状态 $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$ ，把式 (3.3.21) 表示为组合系统的状态方程和输出方程，即证得式 (3.3.20)。证明完毕。

注：类似地，也可导出 N 个线性时不变系统 (3.3.16) 顺序构成的串联组合系统 Σ_T 的状态空间描述，但描述的形式较之式 (3.3.20) 要复杂得多。因此，不再对这类情形进行讨论。

(2) 串联系统的传递函数矩阵

对两个线性时不变子系统按照 “ $\Sigma_1 - \Sigma_2$ ” 顺序串联构成的组合系统 Σ_T ，表子系统的传递函数矩阵为 $\mathbf{W}_1(s)$ 和 $\mathbf{W}_2(s)$ ，则 Σ_T 的传递函数矩阵为：

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_1(s) \mathbf{W}_2(s) = \prod_{i=1}^2 \mathbf{W}_i(s) \quad (3.3.22)$$

对 N 个线性时不变子系统按 “ $\Sigma_1 - \Sigma_2 - \cdots - \Sigma_{N-1} - \Sigma_N$ ” 顺序串联构成的组合系统 Σ_T ，表子系统的传递函数矩阵为 $\mathbf{W}_1(s), \mathbf{W}_2(s), \cdots, \mathbf{W}_N(s)$ ，则 Σ_T 的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}(s) = \prod_{i=1}^N \mathbf{W}_i(s) \quad (3.3.23)$$

证明 利用串联系统的特征 (3.3.19)，可以得到

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = [\mathbf{W}_2(s) \mathbf{W}_1(s)] \hat{\mathbf{u}}(s) \quad (3.3.24)$$

基于此，即证得式 (3.3.22)。类似地，也可证明式 (3.3.23)。证明完成。

3. 子系统的反馈连接

反馈组合系统是最为重要的一类控制系统。这里仅讨论输出反馈连接组合系统。考察图 3.27 所示的由两个线性时不变子系统按图示方式构成的输出反馈系统 Σ_F ，并设子系统为严真，其状态空间描述和传递函数矩阵为：

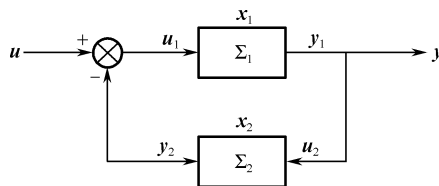


图 3.27 子系统的输出反馈连接

$$\begin{aligned}\Sigma_i: \quad \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i\end{aligned} \quad i=1, 2 \quad (3.3.25)$$

和

$$\mathbf{W}_i(s) \quad i=1, 2 \quad (3.3.26)$$

不难看出，两个子系统可以实现图示输出反馈连接的条件是，子系统在输入维数和输出维数上满足关系式：

$$\dim(\mathbf{u}_1) = \dim(\mathbf{y}_2), \quad \dim(\mathbf{u}_2) = \dim(\mathbf{y}_1) \quad (3.3.27)$$

其中， $\dim(\cdot)$ 表示向量的维数。输出反馈系统在变量关系上的特征为

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y} = \mathbf{u}_2 \quad (3.3.28)$$

在此基础上，对图示连接的输出反馈系统可得出如下结论。

(1) 输出反馈系统的状态空间描述

对两个线性时不变子系统 (3.3.25) 按图 3.27 所示连接的输出反馈系统 Σ_F ，取组合状态为 $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$ ，则 Σ_F 的状态空间描述为

$$\begin{aligned}\Sigma_F: \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (3.3.29)$$

证明 基于子系统的描述 (3.3.25)，并考虑到 Σ_1 与 Σ_2 的内部独立性，以及输出反馈系统的特征 (3.3.28)，就可导出：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1\end{aligned} \quad (3.3.30)$$

进而，基于组合状态 $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$ ，把式 (3.3.30) 表示为组合系统的状态方程和输出方程，即证得式 (3.3.29)。证明完成。

注：应当指出，这里附加引入的子系统为严真的假设不是实质性的。引入这个假设的目的，只是为使式 (3.3.29) 给出的 Σ_F 的状态空间描述形式不致过于复杂。另一方面，这个假设也是符合实现世界中遇到的大多数实际问题的。

(2) 输出反馈系统的传递函数

对两个线性时不变子系统按图 3.27 所示连接的输出反馈系统 Σ_F ，表示子系统的传递函数矩阵为 $\mathbf{W}_1(s)$ 和 $\mathbf{W}_2(s)$ ，并假设

$$\det[\mathbf{I} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)] \neq 0, \quad \det[\mathbf{I} + \mathbf{W}_2(s)\mathbf{W}_1(s)] \neq 0$$

则 Σ_F 的传递函数矩阵为

$$\mathbf{W}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)]^{-1} \mathbf{W}_1(s) \quad (3.3.31)$$

或

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_1(s)[\mathbf{I} + \mathbf{W}_2(s)\mathbf{W}_1(s)]^{-1} \quad (3.3.32)$$

证明 仅证明关系式 (3.3.31)，对关系式 (3.3.32) 可类似地证明。为此，利用输出反馈系统的特征 (3.3.28)，可以得到

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}(s) &= \hat{\mathbf{y}}_1(s) = \mathbf{W}_1(s)[\hat{\mathbf{u}}(s) - \mathbf{W}_2(s)\hat{\mathbf{y}}(s)] \\ &= \mathbf{W}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) - \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)\hat{\mathbf{y}}(s)\end{aligned} \quad (3.3.33)$$

进而，通过简单的运算和整理，可以导出：

$$[\mathbf{I} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)]\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{W}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \quad (3.3.34)$$

再由 $\det[\mathbf{I} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)] \neq 0$ 的假设知， $[\mathbf{I} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)]$ 为非奇异。从而，将上式等式两边乘 $[\mathbf{I} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_2(s)]^{-1}$ ，即证得式 (3.3.31)。证明完成。

注：从上述对输出反馈系统传递函数矩阵关系式的推导过程可以看出，子系统为严真的假设在推导中没有起任何作用，这从另一方面说明这个假设的非实质性。

3.4 状态矢量的线性变换

3.4.1 系统状态方程的非唯一性

如前所述，对于一个给定的动态系统，可以由许多状态变量的不同选取，从而得到不同的状态空间描述，即系统的不同结构形式。状态矢量的不同选取，实质上是状态矢量的一种线性变换，或称坐标变换。

例如，二维矢量

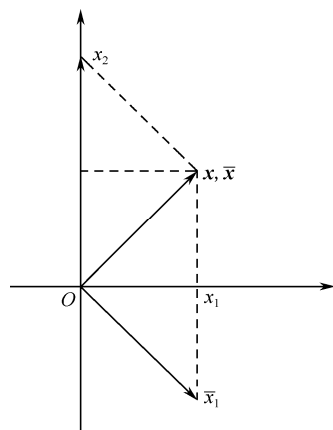


图 3.28 坐标变换图

设新矢量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

则

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_2$$

$$\bar{x}_2 = 2x_2$$

相当于由原来的坐标 (x_1, x_2) 变换成新坐标 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) ，则二维矢量表示成

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{x}_2$$

如图 3.28 所示。

设给定系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.4.1)$$

我们总可以找到任意一个非奇异矩阵 \mathbf{T} ，将状态矢量 \mathbf{x} 作线性变换，得到另一状态矢量 \mathbf{z} 。设变换关系为

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}, \quad \text{即 } \mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

代入式 (3.4.1)，得一新状态空间描述

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

很明显，由于矩阵 \mathbf{T} 为任意的非奇异矩阵，故线性变换是非唯一的，也就是系统的状态空间描述为非唯一的，通常称矩阵 \mathbf{T} 为变换矩阵。

例 3.4.1 系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [0 \quad 3] \mathbf{x}$$

1) 若取变换矩阵

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{即 } \mathbf{T}_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

则新向量为

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

即

$$z_1 = \frac{1}{2} x_2$$

$$z_2 = \frac{1}{2} x_1 - \frac{3}{2} x_2$$

即新的状态变量 z_1 、 z_2 是原来状态变量 x_1 、 x_2 的线性组合。

在这个状态矢量 \mathbf{z} 下, 新的状态空间描述将为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_1 \mathbf{z} + \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{b} u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{c} \mathbf{T}_1 \mathbf{z} = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} = [6 \quad 0] \mathbf{z} \quad (3.4.2)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{x}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

观察式 (3.4.2), 新的状态空间描述为标准 I 型。

2) 若取变换矩阵

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{即 } \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

则变换后的新状态矢量为

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

在这另一个状态矢量 $\tilde{\mathbf{z}}$ 下, 得到另一个状态空间描述

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{b}} u$$

$$y = [3 \quad 3] \tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{z}} \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可见, 式 (3.4.3) 表示的状态空间描述的系统矩阵是对角线的。

3) 若想把式 (3.4.3) 的输入矩阵 $\tilde{\mathbf{b}}$ 从 $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ 变换成 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 形式, 则需要再进行变换, 寻求一个 \mathbf{T}_3 变换阵, 使

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_3^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即满足

$$\mathbf{T}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

故可选

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{即} \quad \mathbf{T}_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

再次变换后的状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}} &= \mathbf{T}_3^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{T}_3 \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{T}_3^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [3 \quad 3] \mathbf{T}_3 \bar{\mathbf{z}} = [6 \quad -6] \bar{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

这样，得到的就是约当标准型。

3.4.2 系统特征值的不变性

(1) 系统特征值

对于线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

其特征值就是系统矩阵 \mathbf{A} 的特征值，也即特征方程 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ 的根。 $n \times n$ 方阵 \mathbf{A} 有 n 个特征根，实际物理系统中， \mathbf{A} 为实数方阵，故特征值或为实数，或为成对共轭复数。如 \mathbf{A} 为实数对称方阵，则其特征值都是实数。

(2) 特征值的不变性和系统的不变量

同一系统，经非奇异变换后，得

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{D} u$$

其特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = 0$$

可以证明

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

现证明如下：

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| &= |\lambda \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1} \lambda \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1}| |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}| |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \\ &= |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

所以，系统的非奇异变换，其特征方程不变，即其特征值不变。

将特征方程写成多项式形式

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

由于特征方程不变，故特征多项式的各系数 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 也是不变的，所以称特征多项

式的系数为系统的不变量。

3.4.3 特征矢量

一个 n 维矢量 \mathbf{p}_i ，经过以 \mathbf{A} 作为变换阵的变换，得到一个新的矢量 $\tilde{\mathbf{p}}_i$ ，即

$$\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{A}\mathbf{p}_i$$

如果有

$$\tilde{\mathbf{p}}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$$

这里， λ_i 为 \mathbf{A} 的特征值。即矢量 \mathbf{p}_i 经 \mathbf{A} 阵线性变换后，其方向不变，仅长度变化了 λ_i 倍，则称 \mathbf{p}_i 为 \mathbf{A} 的对应于 λ_i 的特征矢量，此时有

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$$

例 3.4.2 试求

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

的特征矢量。

解 \mathbf{A} 的特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda + 11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

解得

$$\begin{aligned} \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 &= 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) &= 0 \\ \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3 \end{aligned}$$

1) 对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征矢量 \mathbf{p}_1

设

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix}$$

按定义

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{11} \\ -p_{12} \\ -p_{13} \end{bmatrix}$$

展开得

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{12} - p_{13} &= 0 \\ -6p_{11} - 10p_{12} + 6p_{13} &= 0 \\ -6p_{11} - 11p_{12} + 6p_{13} &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$p_{12} = 0, \quad p_{11} = p_{13}$$

令

$$p_{11} = p_{13} = 1$$

于是

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) 同理, 可以算出对应于 $\lambda_2 = -2$ 时的特征矢量

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

对应于 $\lambda_3 = -3$ 时的特征矢量

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3.4.4 状态空间描述变换为约当标准型

把系统方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.4.4)$$

变换为

$$\begin{cases} \dot{z} = Jz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_l \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{\sigma_i \times \sigma_i} \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

这里假定特征值 λ_1 (σ_1 重), λ_2 (σ_2 重), \dots , λ_l (σ_l 重), 则有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_l = n$$

当 $\sigma_k = 1$ 时, $J_k = [\lambda_k]$ 即为单根情况。

下面介绍求变换矩阵 T 的方法。

(1) A 阵为任意形式

① 特征值无重根时

设 λ_i 为 A 的 n 个互异根 ($i=1, 2, \dots, n$, 此时, $l=n$), 求出 λ_i 的特征矢量 p_i

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

由各特征矢量构成的矩阵, 即为要求的变换矩阵 T , 即

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

证明 由于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异, 故特征矢量 p_1, p_2, \dots, p_n 线性无关, 从而由它们构成的矩阵 $T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 必为非奇异, 即 T^{-1} 存在, 把变换 $x = Tz$ 代入式 (3.4.4) 得

$$T\dot{z} = ATz + Bu$$

两边乘 T^{-1} , 有

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \quad (3.4.5)$$

变换矩阵

$$T = [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

两边左乘 A , 有

$$AT = A[p_1, p_2, \dots, p_n]$$

由特征矢量的定义

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$AT = A[\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n] =$$

$$[p_1, p_2, \dots, p_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

两边左乘 T^{-1} , 得

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

从而证明了式 (3.4.5) 系统矩阵 $T^{-1}AT$ 是对角线阵。

例 3.4.3 有系统矩阵 A 如下式, 试求变换矩阵 T , 使 $T^{-1}AT = A$ (A 为对角线矩阵)。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

解 A 特征值及对应于各特征值的特征矢量已在前例中求出, 为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -3$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

则可构成变换矩阵 T 并计算其逆阵 T^{-1}

$$T = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

作为验证, 计算

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

② 特征值有重根时

设 A 的特征根有 q 个 λ_1 的重根, 其余 $(n-q)$ 个根为互异根, 现不加证明地引出变换阵 T 的计算公式如下

$$T = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_q \ p_{q+1} \ \cdots \ p_n]$$

式中, p_{q+1}, \dots, p_n 是对应于 $(n-q)$ 个单根的特征矢量, 求法同前, 对应于 q 个 λ_1 重根的矢量 p_1, p_2, \dots, p_q , 应根据下式计算

$$\begin{cases} \lambda_1 p_1 - Ap_1 = 0 \\ \lambda_1 p_2 - Ap_2 = -p_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 p_q - Ap_q = -p_{q-1} \end{cases}$$

显然, p_1 仍为 λ_1 对应的特征矢量, 其余 p_2, \dots, p_q 则称之为广义特征矢量。

例 3.4.4 有矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

求将其变换成约当型矩阵的变换阵 T 。

解 先求出 A 的特征值

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & -3 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{即} \quad \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\text{得} \quad \lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 2$$

对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征矢量 p_1 , 按

$$\lambda_1 p_1 - Ap_1 = 0$$

即

$$-\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = 0$$

解之得

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对应于 $\lambda_2 = \lambda_1 = -1$ 的广义特征向量 p_2 , 按

$$\lambda_1 p_2 - Ap_2 = -p_1$$

$$-\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

最后对应于 $\lambda_3 = 2$ 的特征矢量 \mathbf{p}_3 ，按

$$\lambda_3 \mathbf{p}_3 = \mathbf{A} \mathbf{p}_3$$

解得

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

于是变换矩阵

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

从而计算得

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后的约当型矩阵为

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

③ 特征矢量的另一求取方法

由上可知，求约当形的变换阵关键是求其特征矢量。

上面介绍了系统特征矢量的一种按其定义的求取方法，即满足

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$$

不为零的矢量 \mathbf{p}_i 即为要求的特征矢量，下面介绍另外一种求特征矢量的方法。

设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则

$$\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_i - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_i - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_i - a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

这里不加证明，给出对应于特征值 λ_i 的特征矢量 \mathbf{p}_i 的各元素为对式 (3.4.6) 按某一行展开的

各代数余子式。如按第一行展开，则为

$$p_{i1} = \begin{vmatrix} \lambda_i - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n2} & \cdots & \lambda_i - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$p_{i2} = \begin{vmatrix} -a_{21} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \lambda_i - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$p_{ik} = (-1)^{(1+j)} \begin{vmatrix} -a_{21} & \lambda_i - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_i - a_{nn} \end{vmatrix}$$

如果按某行展开的代数余子式全部为零，即特征矢量为零矢量，不符合要求，则可按另一行展开，重新计算。

例 3.4.5 求下面矩阵 A 的约当型变换阵 T 。

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

解 特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 4 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

解得其特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$ 。

关于 λ_i 按第一行展开的代数余子式为

$$p_{i1} = \begin{vmatrix} \lambda_i - 1 & 0 \\ -4 & \lambda_i - 1 \end{vmatrix}, \quad p_{i2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & \lambda_i - 1 \end{vmatrix}, \quad p_{i3} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_i - 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

代入 $\lambda_1 = 1$ ，求得

$$p_{11} = p_{12} = p_{13} = 0$$

改为按第二行展开

$$p_{i1} = - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & \lambda_i - 1 \end{vmatrix}, \quad p_{i2} = \begin{vmatrix} \lambda_i - 5 & 0 \\ 4 & \lambda_i - 1 \end{vmatrix}, \quad p_{i3} = \begin{vmatrix} \lambda_i - 5 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

对于 $\lambda_1 = 1$ ，计算得

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = 0, \quad p_{13} = -32$$

对于重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ，按下面方法求取

$$p_{21} = \frac{d}{d\lambda_1} (4\lambda_1 - 4) \big|_{\lambda_1=1} = 4$$

$$p_{22} = \frac{d}{d\lambda_1} (\lambda_1^2 - 6\lambda_1 + 5) \big|_{\lambda_1=1} = -4$$

$$p_{23} = \frac{d}{d\lambda_1} (4\lambda_1 - 36) \big|_{\lambda_1=1} = 4$$

对于 $\lambda_3 = 5$ ，求得

$$p_{31}=16, \quad p_{32}=0, \quad p_{33}=-16$$

于是变换阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 0 \\ -32 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

变换成约当矩阵

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) \mathbf{A} 阵为标准型

即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

① \mathbf{A} 的特征值无重根时, 其变换矩阵是一个范德蒙德 (Vandermonde) 矩阵, 为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

证明 \mathbf{A} 的特征方程可写成

$$\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + a_{n-2}\lambda_i^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

即

$$\lambda_i^n = -a_{n-1}\lambda_i^{n-1} - a_{n-2}\lambda_i^{n-2} - \cdots - a_0$$

有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{A} \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{A}$$

② \mathbf{A} 的特征值有重根时, 已有 λ_i 的三重根为例

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \frac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \lambda_4^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

③ 有共轭复根时，以四阶系统其中一对共轭复根为例，即 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ； $\lambda_3 \neq \lambda_4$ 。

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \sigma & \omega & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \sigma^2 - \omega^2 & 2\sigma\omega & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \sigma^3 - 3\sigma\omega^2 & 3\sigma^2\omega - \omega^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array} \right]$$

这里要指出的是，当特征根出现复数时，化为约当型的系统矩阵也将出现复数的元素，在计算上很不方便，而且实际的物理系统的构成不会出现复数，这样系统矩阵有复数的系统不能用实际系统来模拟，所以不希望矩阵中有复数。当其特征根为复数时，需把 A 变换为下面的模态型，例如有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ，此时

$$J = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

3.5 离散时间系统的状态空间描述

在此以前，我们分析的都是连续时间系统，它的特点是用时间上连续的信号去控制被控系统，采样控制系统是将信号按时间分割，在离散的时间瞬时用采样控制信号去控制被控系统。随着计算机控制技术的发展，采样控制变得越来越重要。

采样控制系统的数学描述在时间变量上是不连续的，故称为离散时间系统，但是连续时间系统的状态空间法完全适用于离散时间系统。

3.5.1 离散系统的状态空间表达式

在经典控制理论中，离散时间系统的动力学特性通常用输入和输出采样值的高阶差分方程来描述，对周期性采样的线性定常系统而言，这个差分方程具有如下的一般形式：

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_0y(k) = b_m u(k+m) + b_{m-1}u(k+m-1) + \cdots + b_0u(k)$$

式中， k 为系统运动过程的第 k 个采样时刻。

经过 z 变换可以导出反映输入-输出特性的脉冲传递函数

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

仿效连续时间系统，可以写出单输入单输出离散时间系统的状态空间描述

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

式中， $\mathbf{x}(k)$ ——离散状态矢量，设为 n 维；

$u(k)$ ——离散输入变量；

$y(k)$ ——离散输出变量；

\mathbf{G} ——系统矩阵， $n \times n$ 维；

\mathbf{h} ——输入矩阵， $n \times 1$ 维；

\mathbf{c} ——输出矩阵， $1 \times n$ 维；

d ——直接传递函数，标量。

由差分方程或脉冲传递函数求取离散状态空间描述也是一种实现，实现也是非唯一的，各种标准型式与连续时间系统相同。

在认为两相邻采样时刻 $u(k)$ 不变的条件下式 (3.5.1) 的状态空间描述也可用离散系统状态结构图（见图 3.29）表示。图 3.29 中 T 表示单位延迟器，类似于连续系统中的积分器。

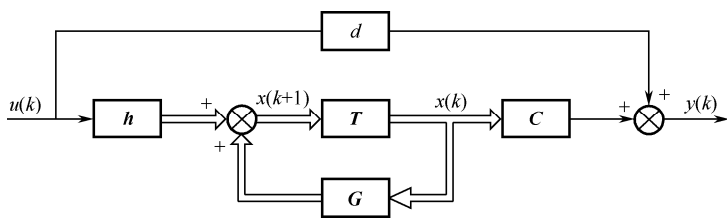


图 3.29 离散系统状态结构图

对于多输入多输出离散系统状态空间描述为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k) \in R^r \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) & \mathbf{y}(k) \in R^m \end{aligned}$$

式中， \mathbf{H} —— $n \times r$ 维；

\mathbf{C} —— $m \times n$ 维；

\mathbf{D} ——直接传递矩阵， $m \times r$ 维。

3.5.2 由差分方程化为状态空间表达式

连续时间系统中由描述输入-输出关系的微分方程或传递函数建立状态空间表达式的方法完全适用于离散时间系统。化标量差分方程为离散状态空间表达式与化标量微分方程为连续状态空间表达式类似，可分两种情况讨论。

(1) 差分方程不含输入函数的高阶差分

此时标量差分方程具有如下形式

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = bu(k) \quad (3.5.2)$$

选取各采样时刻的 $y(k), y(k+1), \cdots, y(k+n-1)$ 为 n 个状态变量，即令

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) \end{cases} \quad (3.5.3)$$

由式 (3.5.2) 和式 (3.5.3) 得一阶差分方程组, 即

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = y(k+n) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \cdots - a_1 x_n(k) + bu(k) \end{cases} \quad (3.5.4)$$

又输出方程为

$$y(k) = x_1(k) \quad (3.5.5)$$

根据式 (3.5.4) 和式 (3.5.5) 可写出向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(k) \quad (3.5.6)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

(2) 差分方程包含输入函数的高阶差分

此时描述单输入单输出线性定常离散时间系统的差分方程为

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) \\ & = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_{n-1} u(k+1) + b_n u(k) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

与连续系统微分方程中包含输入函数导数项时选择状态变量类似, 可选取如下一组状态变量

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - \beta_0 u(k) \\ x_2(k) = y(k+1) - \beta_0 u(k+1) - \beta_1 u(k) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) - \beta_0 u(k+n-1) - \beta_1 u(k+n-2) - \cdots - \beta_{n-1} u(k) \end{cases} \quad (3.5.8)$$

式中, 待定系数 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$ 由下式确定

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - a_2\beta_{n-3} - \cdots - a_{n-1}\beta_0 \end{cases} \quad (3.5.9)$$

$$\text{令} \quad \beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \cdots - a_n\beta_0 \quad (3.5.10)$$

则由式 (3.5.8)、式 (3.5.9) 和式 (3.5.10) 得离散系统式 (3.5.7) 的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (3.5.11)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \beta_0 u(k)$$

例 3.5.1 设一个三阶差分方程为

$$y(k+3) + 5y(k+2) + 7y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

求相应的离散状态方程和输出方程。

解 差分方程的系数为

$$a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 3, b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$$

由式 (3.5.9) 和式 (3.5.10) 可得相应的系数 β_i 为

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = -3$$

则根据式 (3.5.11) 得离散状态空间表达式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(k)$$

对应离散系统状态空间表达式的结构图如图 3.30 所示, 其中 z^{-1} 为单位延迟环节。

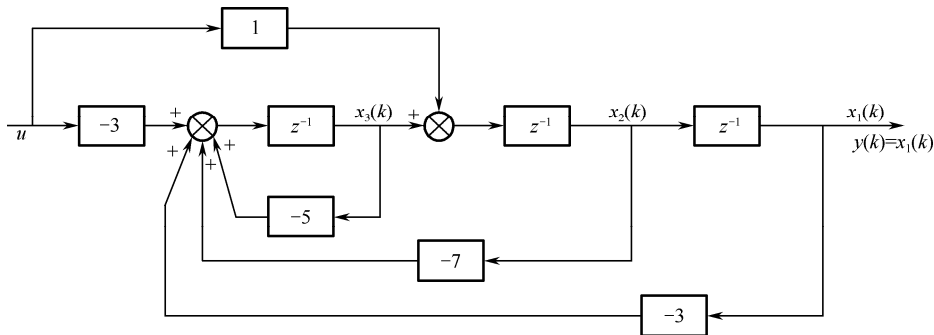


图 3.30 例 3.5.1 离散系统的结构图

3.5.3 由脉冲传递函数化为状态空间表达式

设线性定常离散系统的脉冲传递函数为

$$\bar{W}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} + d = W(z) + d \quad (3.5.12)$$

式中, $Y(z)$ 为输出的 z 变换; $U(z)$ 为输入的 z 变换。

根据式 (3.5.12) 可写出输出量与输入量之间的差分方程, 然后利用 3.5.2 节所述方法转换为离散状态空间表达式。实际上, 式 (3.5.12) 和线性定常连续系统传递函数类似, 故也可仿照 3.5.1 节中连续系统的实现方法将脉冲传递函数化为离散状态空间表达式。

例如, 可仿照 3.5.1 节连续系统实现的级联分解法推导式 (3.5.12) 对应的离散状态空间表达式。将式 (3.5.12) 改写为

$$\bar{W}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} + d \quad (3.5.13)$$

则有

$$Y(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} U(z) + d U(z) \quad (3.5.14)$$

令

$$\tilde{Y}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} U(z) \quad (3.5.15)$$

则式 (3.5.14) 成为

$$Y(z) = \tilde{Y}(z) + d U(z) \quad (3.5.16)$$

引入中间变量 $M(z)$, 将式 (3.5.15) 改写为

$$\frac{\tilde{Y}(z)}{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}} = \frac{U(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} = M(z) \quad (3.5.17)$$

由式 (3.5.17) 得

$$M(z) = U(z) - a_1 z^{-1} M(z) - \cdots - a_{n-1} z^{-(n-1)} M(z) - a_n z^{-n} M(z) \quad (3.5.18)$$

$$\tilde{Y}(z) = b_1 z^{-1} M(z) + b_2 z^{-2} M(z) + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} M(z) + b_n z^{-n} M(z) \quad (3.5.19)$$

选取状态变量的 z 变换为

$$\begin{cases} X_1(z) = z^{-n} M(z) \\ X_2(z) = z^{-n+1} M(z) \\ \vdots \\ X_{n-1}(z) = z^{-2} M(z) \\ X_n(z) = z^{-1} M(z) \end{cases} \quad (3.5.20)$$

由式 (3.5.20) 得

$$\begin{cases} zX_1(z) = X_2(z) \\ zX_2(z) = X_3(z) \\ \vdots \\ zX_{n-1}(z) = X_n(z) \end{cases} \quad (3.5.21)$$

对式 (3.5.21) 作 z 反变换得 $(n-1)$ 个一阶差分方程

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \end{cases} \quad (3.5.22)$$

由式 (3.5.20) 有

$$zX_n(z) = M(z) \quad (3.5.23)$$

将式 (3.5.18) 和式 (3.5.20) 代入式 (3.5.23) 得

$$zX_n(z) = -a_1X_n(z) - \cdots - a_{n-1}X_2(z) - a_nX_1(z) + U(z) \quad (3.5.24)$$

对式 (3.5.24) 作 z 反变换得一阶差分方程

$$x_n(k+1) = -a_1x_n(k) - \cdots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + U(k) \quad (3.5.25)$$

将式 (3.5.20) 代入式 (3.5.19) 得

$$\tilde{Y}(z) = b_1X_n(z) + b_2X_{n-1}(z) + \cdots + b_{n-1}X_2(z) + b_nX_1(z) \quad (3.5.26)$$

将式 (3.5.26) 代入式 (3.5.16) 并作 z 反变换得

$$y(k) = b_1x_n(k) + b_2x_{n-1}(k) + \cdots + b_{n-1}x_2(k) + b_nx_1(k) + du(k) \quad (3.5.27)$$

由式 (3.5.22)、式 (3.5.25) 和式 (3.5.27) 得式 (3.5.12) 的离散状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.5.28)$$

$$y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + du(k)$$

式 (3.5.28) 为式 (3.5.12) 脉冲传递函数的能控标准型实现。

又例如, 也可仿照 3.5.1 节连续系统并联实现的方法根据脉冲传递函数建立离散状态空间表达式, 同样可根据脉冲传递函数是否含重极点分两种情况讨论。若脉冲传递函数 $\bar{W}(z)$ 只含单实极点即其具有互异的实极点 z_1, z_2, \cdots, z_n , 则 $\bar{W}(z)$ 可应用分部分式法分解为

$$\bar{W}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{c_n}{z - z_n} + d \quad (3.5.29)$$

式中,

$$c_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \bar{W}(z)(z - z_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

取离散状态变量的 z 变换为

$$X_i(z) = \frac{1}{z - z_i} U(z), \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (3.5.30)$$

则

$$zX_i(z) = z_iX_i(z) + U(z), \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (3.5.31)$$

$$Y(z) = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z) + \cdots + c_n X_n(z) + dU(z) \quad (3.5.32)$$

对式 (3.5.31) 和式 (3.5.32) 作 z 反变换, 则得离散状态空间表达式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} z_1 & & \mathbf{0} \\ & z_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & z_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.5.33)$$

$$\mathbf{y}(k) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \mathbf{x}(k) + du(k)$$

式 (3.5.33) 为对角标准型实现。

对于脉冲传递函数 $\bar{W}(z)$ 含重实极点的情况, 也可仿照连续系统传递函数含重实极点时的约当标准型实现方法进行处理, 本书不再赘述。

例 3.5.2 已知一离散系统的脉冲传递函数为

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

试写出其对角标准型状态空间表达式。

解 将 $W(z)$ 分式展开为

$$W(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{1}{z-1} - \frac{0.632}{z-0.368}$$

则

$$Y(z) = \frac{U(z)}{z-1} - \frac{0.632U(z)}{z-0.368}$$

由上式可以画出系统模拟结构图, 如图 3.31 所示, 在图上设置状态变量, 即得状态空间表达式为

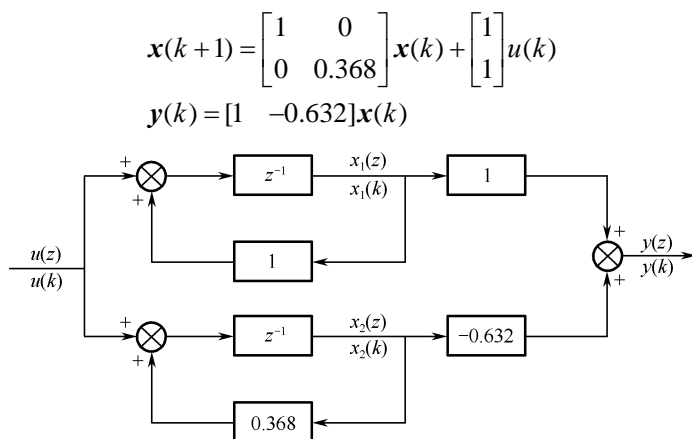


图 3.31 例 3.5.2 中系统状态变量图

3.5.4 由离散系统状态空间表达式求脉冲传递函数矩阵

r 维输入、 m 维输出的多输入输出 (MIMO) 线性定常离散系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

对上式进行 z 变换, 得

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= GX(z) + HU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

令系统初始条件为零，由式 (3.5.35) 得

$$X(z) = (zI - G)^{-1} HU(z) \quad (3.5.36)$$

$$Y(z) = [C(zI - G)^{-1} H + D]U(z) = W(z)U(z) \quad (3.5.37)$$

$$\text{式中} \quad W(z) = C(zI - G)^{-1} H + D \quad (3.5.38)$$

为系统的脉冲传递函数阵，其是一个 $m \times r$ 维矩阵，表征了 MIMO 离散系统的动态特性。若为单输入单输出线性定常离散系统，由式 (3.5.38) 求得的 $W(z)$ 则为脉冲传递函数。

3.6 利用 MATLAB 进行线性系统的状态描述

本章前面已经介绍了线性系统的数学模型、传递函数、微分方程和状态空间模型。线性系统的微分方程一般可表示为

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y \\ = b_0(t)u^{(m)} + b_1(t)u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}(t)\dot{u} + b_m(t)u \end{aligned}$$

对应的传递函数一般可表示为

$$g(s) = \frac{b_0(t) + b_1(t)s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}(t)s + b_m(t)}{s^n + a_1(t)s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)s + a_n(t)}$$

若系数 $a_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$ 和 $b_i(t) (i=0, 1, \dots, m)$ 为常数，则系数称为线性定常系统。

1. 传递函数的输入

利用下列命令可轻易地将传递函数模型输入到 MATLAB 环境中。

```
>> num = [b0, b1, ..., bn];
>> den = [1, a1, a2, ..., an];
```

在当前 MATLAB 中，调用 tf() 函数构造出对应传递函数对象。调用格式：

```
>> W = tf(num, den);
```

其中，(num, den) 分别为系统的分子和分母系数的向量。返回变量 W 为系统传递函数对象。

例 3.6.1 已知传递函数模型

$$W(s) = \frac{s + 5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$$

可由下列命令输入到 MATLAB 工作空间中去。

```
>> num=[1,5]; den=[1,2,3,4,5]; W=tf(num,den)
Transfer function:
      s + 5
-----
s^4 + 2 s^3 + 3 s^2 + 4 s + 5
```

2. 状态空间模型的输入

线性定常系统的状态空间模型可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

式中， $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 为状态向量， \mathbf{A} 为 $n \times n$ 常值矩阵， \mathbf{B} 为 $n \times p$ 常值输入阵， \mathbf{C} 为 $q \times n$ 常值输入矩阵， \mathbf{D} 为 $q \times p$ 常值矩阵。

表示状态空间模型的基本要素是状态向量和常数矩阵 \mathbf{A} ， \mathbf{B} ， \mathbf{C} ， \mathbf{D} 。由于 MATLAB 本来就是为矩阵运算而设计的，因而特别适合于处理状态空间模型，只需将各系数矩阵按常规矩阵方式输入到工作空间即可。

```
>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...,a2n;a_n1,...,a_nm];
>> B=[b0,b1,...,b_m];
>> C=[c1,c2,...,c_n];
>> D=d;
```

类似于前面介绍的传递函数对象，在当前 MATLAB 中可调用状态方程对象 ss()构造状态方程模型。调用格式如下：

```
>> ss(A,B,C,D)
```

例 3.6.2 双输入双输出系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2.25 & -5 & -1.25 & -0.5 \\ 2.25 & -4.25 & -1.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.5 & -1.25 & -1 \\ 1.25 & -1.75 & -0.25 & -0.75 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

该方程可由下列语句输入到 MATLAB 工作空间。

```
>> A=[2.25,-5,-1.25,-0.5;2.25,-4.25,-1.25,-0.25;0.25,-0.5,-1.25,-1;1.25,-1.75,-0.25,-0.75];
>> B=[4,6;2,4;2,2;0,2];
>> C=[0,0,0,1;0,2,0,2];
>> D=zeros(2,2);G=ss(A,B,C,D)
```

a =

	x1	x2	x3	x4
x1	2.25	-5	-1.25	-0.5
x2	2.25	-4.25	-1.25	-0.25
x3	0.25	-0.5	-1.25	-1
x4	1.25	-1.75	-0.25	-0.75

b =

	u1	u2
x1	4	6
x2	2	4
x3	2	2
x4	0	2


```

c =
           x1  x2  x3  x4
      y1    0   0   0   1
      y2    0   2   0   2

d =
           u1  u2
      y1    0   0
      y2    0   0

```

3. 两种模型间的转换

在 MATLAB 中还可以方便地进行传递函数模型与状态空间模型的转换，状态方程模型用 W 来表示，则可用下面的命令得出等效传递函数 $W1$ 。

```
>>W1=tf(W)
```

例 3.6.3 已知系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

由下面 MATLAB 语句可得出系统相应的传递函数模型。

```

>> A=[0,1,0,0;0,0,-1,0;0,0,0,1;0,0,5,0];
>> B=[0;1;0;-2];C=[1,0,0,0];D=0;
>> W=ss(A,B,C,D); W1=tf(W)

```

Transfer function:

$s^2 + 1.334e-013 s - 3$

$s^4 - 5 s^2$

同理由 ss() 函数可立即给出相应的状态空间模型。

例 3.6.4 考虑下面给定的单变量系统传递函数

$$g(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

由下面的 MATLAB 语句将直接获得系统的状态空间模型。

```
>> num=[1,7,24,24];den=[1,10,35,50,24];G=tf(num,den);G1=ss(G)
```

```
a =
```

```

           x1      x2      x3      x4
      x1    -10    -4.375    -3.125    -1.5

```

x2	8	0	0	0
x3	0	2	0	0
x4	0	0	1	0

b =

	u1
x1	2
x2	0
x3	0
x4	0

c =

	x1	x2	x3	x4
y1	0.5	0.4375	0.75	0.75

d =

	u1
y1	0

4. 系统的线性非奇异变换

MATLAB 中函数 `ss2ss()` 可实现对系统的线性非奇异变换。其调用格式为

$$WT = \text{ss2ss}(W, T)$$

其中, W 、 WT 分别为变换前、后系统的状态空间模型, T 为线性非奇异变换阵。

$$[At, Bt, Ct, Dt] = \text{ss2ss}(A, B, C, D, T)$$

其中, (A, B, C, D) 、 $(At, Bt, Ct, Dt) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$ 分别为变换前、后系统的状态空间模型的系数阵, T 为线性非奇异变换阵。

例 3.6.5 已知系统状态空间表达式的系数阵为

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0.5 \quad -0.4375 \quad 0.4375], D = 0$$

试应用 `ss2ss()` 函数进行系统的线性非奇异变换。

解 变换阵 T 只要保证其非奇异即可, 在此选择单位反对角阵作为变换阵。

```
A=[10 -4 2;8 0 0;0 2 0];
```

```
B=[2;0;0];
```

```
C=[0.5 -0.4375 0.4375];
```

```
D=0;
```

```
W1=ss(A,B,C,D); %建立变换前原状态空间模型 W1
```

```
T=flipr(eye(3)); %构造线性非奇异变换阵 T 为单位反对角阵
```

```
WT=ss2ss(W1,T) %获得变换后状态空间模型 WT
```

程序运行结果

```
a =
      x1  x2  x3
x1      0   2   0
x2      0   0   8
x3      2  -4  10

b =
      u1
x1      0
x2      0
x3      2

c =
      x1      x2      x3
y1      0.4375 -0.4375  0.5

d =
      u1
y1      0
```

思考题与习题

3.1 电路如图 3.32 所示。以电压 $u(t)$ 为输入量，求以电感中的电流和电容上的电压作为状态变量的状态方程，并求以电阻 R_2 上的电压作为输出量的输出方程。

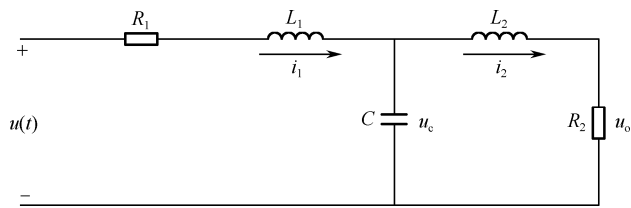


图 3.32 RLC 电路

3.2 有电路图如图 3.33 所示，设输入为 u_1 ，输出为 u_2 ，试自选状态变量并写出其状态空间表达式。

- 3.3 已知系统的微分方程
- (1) $\ddot{y} + \dot{y} + 4y = 3u$
 - (2) $2\ddot{y} + 3\dot{y} = \ddot{u} - u$
 - (3) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 5\ddot{u} + 7u$

试列写它们的状态空间表达式。

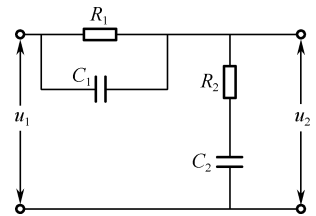


图 3.33 RC 电路

3.4 给定下列状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

求系统的传递函数。

3.5 已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

求其对应的传递函数矩阵。

3.6 已知下列传递函数，试用直接分解法建立其状态空间表达式，并画出状态变量图。

$$(1) W(s) = \frac{s^3 - s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}; \quad (2) W(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}$$

3.7 用串联分解法和并联分解法分别建立下列传递函数的状态空间表达式，并画出状态变量图。

$$(1) W(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)}; \quad (2) W(s) = \frac{2s+1}{s^2 + 6s + 5}$$

3.8 已知系统的传递函数，试求其系统的能控 I 型、能控 II 型，能观测 I 型、能观测 II 型和约当标准型实现，并画出相应的状态结构图。

$$(1) W(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$(2) W(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+1)(s+3)^2}$$

3.9 设离散系统的差分方程为

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

试求系统的状态空间表达式。

3.10 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix}$ 的特征矢量。

3.11 已知某系统的动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

将此化为约当标准型。

第4章 线性动态系统的运动分析

运动分析是控制理论的一个基本的研究课题。线性控制系统的性能是由系统运动过程的形态所决定的,系统状态空间描述的建立为系统的定量分析提供了基础。通常把系统分析分为定量分析和定性分析两个方面。定量分析就是从控制系统的数学模型出发,计算出系统运动的变化规律,即定量地确定系统由输入作用所引起的响应。而定性分析则着重对决定系统行为和综合系统结构具有重要意义的几个关键性质,如稳定性、能控性和能观测性等进行研究。

在讨论了状态方程的描述、标准型和模型转换后,本章以线性系统为对象,包括连续时间系统和离散时间系统,较为系统和全面地讨论系统运动分析的方法,即线性状态方程的求解。有关线性系统的定性分析问题,则在后续章中进行研究。为保证状态方程解的存在性和唯一性,系统矩阵 A 和输入矩阵 B 中各元素必须有界。一般来说,在实际工程中,这个条件一定是满足的。

4.1 线性定常齐次状态方程的求解

对于线性定常连续系统,其状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (4.1.1)$$

分析系统的运动,就是从状态空间描述出发研究由输入作用 $\mathbf{u}(t)$ 和初始状态 \mathbf{x}_0 的激励所引起的状态或输出响应,从而为分析系统的运动状态和性能提供基础。

从数学的角度来看,运动分析的实质就是求解系统的状态方程,即对于给定初始状态 \mathbf{x}_0 和输入向量 $\mathbf{u}(t)$,求解以向量微分方程形式所表示的状态方程。

线性系统的一个基本属性是满足叠加定理。基于这一属性,我们可以把系统在初始状态和输入向量作用下的运动,分解为两个单独的运动,即由初始状态引起的自由运动和由输入作用引起的强迫运动。自由运动就是式 (4.1.1) 的齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (4.1.2)$$

的解,也称其为**零输入响应**。强迫运动则是式 (4.1.1) 在零初始状态下的非齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}, \quad t \geq t_0 \quad (4.1.3)$$

的解,称之为**零状态响应**。系统由初始状态和输入作用所引起的整个响应就是两者的叠加。

当系统的输入作用 $\mathbf{u}(t)$ 等于零时,其状态方程称为齐次状态方程。设初始时刻为 $t_0=0$, $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, 则齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (4.1.4)$$

(1) 齐次状态方程的幂级数解法

我们知道,基于一阶线性齐次微分方程

$$\dot{x} = ax \quad x(0) = x_0 \quad (4.1.5)$$

的解为

$$x(t) = e^{at} x_0 = \left(1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \cdots \right) x_0 \quad (4.1.6)$$

设齐次状态方程 (4.1.4) 的解为与式 (4.1.6) 相类似的系数向量待定的一个幂级数, 即

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots \quad (4.1.7)$$

其中, $\mathbf{b}_i (i=0,1,2,\cdots)$ 为 $n \times 1$ 维待定向量。

将式 (4.1.7) 代入式 (4.1.4) 中可得

$$\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \cdots = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots) \quad (4.1.8)$$

若所设的解满足式 (4.1.4), 那么对所有 t , 式 (4.1.8) 都应成立。因此, 就要求式 (4.1.8) 等号两端 t 的同幂次项系数相等, 也即

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3 \times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0$$

$$\vdots$$

由于 $t_0=0$, $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, 代入式 (4.1.7) 中可得

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$$

因此, 方程 (4.1.4) 的解可写为

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots \right) \mathbf{x}_0 \quad (4.1.9)$$

这个方程右边括号里的展开式是 $n \times n$ 矩阵, 由于它类似于指数函数展开的无穷级数, 所以称其为矩阵指数, 并且定义为

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots \quad (4.1.10)$$

利用矩阵指数的表示法, 则方程 (4.1.4) 的解可写为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad (4.1.11)$$

由式 (4.1.11), 可得

$$\mathbf{x}_0 = [\mathbf{e}^{\mathbf{A}t_0}]^{-1} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}_{t_0}$$

故初始条件为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}$ 时

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_{t_0} \quad (4.1.12)$$

(2) 齐次状态方程的拉氏变换解法

对于矩阵微分方程和普通微分方程一样, 也可以采用拉氏变换法求解。对方程 (4.1.4) 两边取拉氏变换, 可得

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0$$

取拉氏反变换, 得

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}_0 \quad (4.1.13)$$

式 (4.1.13) 就是齐次状态方程 (4.1.4) 的解。

比较式 (4.1.12) 和式 (4.1.13), 有

$$\mathbf{e}^{At} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

所以

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= L[\mathbf{e}^{At}] \\ &= L\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \cdots\right] \\ &= \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} \end{aligned}$$

分析式 (4.11) 和式 (4.12) 所给出的线性定常系统的零输入响应, 可知:

① 如果将 t 取为某个固定值, 那么零输入响应 $\mathbf{e}^{At}\mathbf{x}_0$ 即为状态空间中由初始状态 \mathbf{x}_0 经线性变换阵 \mathbf{e}^{At} 所得出的一个变换点。所以, 系统的自由运动就是由初始状态 \mathbf{x}_0 出发, 并由 \mathbf{x}_0 的各时刻的变换点所组成的一条轨迹。

② 自由运动轨迹的形态, 即系统的零输入响应的状态, 是由矩阵指数函数 \mathbf{e}^{At} 所唯一决定的, \mathbf{e}^{At} 包含了自由运动的全部信息。因此, 我们称 \mathbf{e}^{At} 为状态转移矩阵, 并记为

$$\Phi(t) = \mathbf{e}^{At} \quad \text{或} \quad \Phi(t - t_0) = \mathbf{e}^{A(t-t_0)} \quad (4.1.14)$$

例 已知线性定常系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

试求该系统状态方程的解。

解 由状态方程的系数矩阵 \mathbf{A} 可得

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathbf{e}^{At} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= L^{-1}\left[\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\right] = L^{-1}\left[\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\right] \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}\right\} \\ &= L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ -2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统状态方程的解为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{e}^{At}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ -2\mathbf{e}^{-t} + \mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t})x_{10} + (\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t})x_{20} \\ (-2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t})x_{10} + (-\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t})x_{20} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2 矩阵指数函数及状态转移矩阵

(1) 状态转移矩阵的意义

从齐次线性状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0$$

解的表达式

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_{t_0}$$

可知, 变换矩阵就是矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$, 是一个 $n \times n$ 的时变函数矩阵, 反映了从初始时刻的状态矢量 $\mathbf{x}(0)$ 或 $\mathbf{x}(t_0)$ 到任意时刻 $t > 0$ 或 $t > t_0$ 的状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 的一种矢量变换关系。因此, 从时间角度看, 状态转移矩阵使状态向量随着时间的推移不断地作坐标变换, 不断地在状态空间中作转移, 不断地把初始状态变换为一系列状态矢量 $\mathbf{x}(t)$, 从而在状态空间中形成一条轨迹。从这个意义上说, 矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 起着状态转移的作用, 因此称为状态转移矩阵。这样, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的解又可以写为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$$

或

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

状态转移矩阵的几何意义如图 4.1 所示。

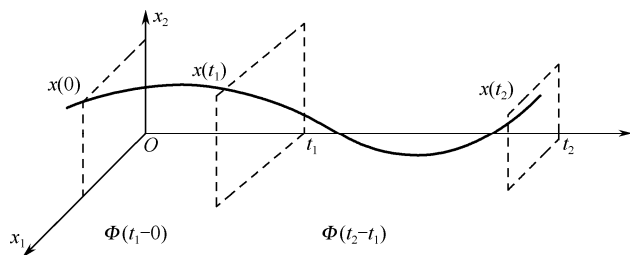


图 4.1 状态转移矩阵的几何意义

由图 4.1 可知, 在 $t=0$ 时, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$, 以此为初始条件, 经过 $\Phi(t_1)$ 的转移, 则在 t_1 时的状态为

$$\mathbf{x}(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \Phi(t_1)\mathbf{x}(0) \quad (4.2.1)$$

经过 $\Phi(t_2)$ 的转移, 则在 t_2 时的状态为

$$\mathbf{x}(t_2) = \begin{bmatrix} x_1(t_2) \\ x_2(t_2) \end{bmatrix} = \Phi(t_2)\mathbf{x}(0)$$

即状态从 $\mathbf{x}(0)$ 开始, 它将按 $\Phi(t_1)$ 或 $\Phi(t_2)$ 转移到新的状态 $\mathbf{x}(t_1)$ 或 $\mathbf{x}(t_2)$, 从而在状态空间中描绘出一条运动轨迹。

若以 t_1 为初始时刻, 则状态 $\mathbf{x}(t_1)$ 是初始状态, 从 t_1 转移到 t_2 的状态将为

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

由式 (4.2.1), 可得

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1)\mathbf{x}(0) \quad (4.2.2)$$

式(4.2.2)表示了从 $\mathbf{x}(0)$ 开始转移到状态 $\mathbf{x}(t_1)$,再由状态 $\mathbf{x}(t_1)$ 转移到 $\mathbf{x}(t_2)$ 的运动规律。换言之,矩阵微分方程的解,在时间上可以任意分段求取,这是采用状态空间分析法的又一特点。

(2) 状态转移矩阵的性质

基于状态转移矩阵的基本关系式和方程,我们可以得出状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的一些常用的基本性质。

① 不发生时间推移下的不变性(状态转移矩阵的初始阵)

$$\mathbf{e}^{A(t-t)} = \mathbf{e}^{A0} = \mathbf{I}$$

这是因为

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots$$

代入 $t=0$,则有

$$\mathbf{e}^{A0} = \mathbf{I}$$

② 微分性和交换性

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t) = \Phi(t)\mathbf{A}$$

因为

$$\mathbf{e}^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots$$

对其求导有

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^kt^{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots\right) \\ &= \mathbf{A}\Phi(t) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^kt^{k-1} + \cdots \\ &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots\right)\mathbf{A} \\ &= \Phi(t)\mathbf{A} \end{aligned}$$

由性质①和②还可得 $\dot{\Phi}(0) = \mathbf{A}$ 。

③ 传递性(组合性)

$$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$$

因为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_2) &= \Phi(t_2 - t_1)\mathbf{x}(t_1) \\ &= \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)\mathbf{x}(t_0) \end{aligned}$$

或

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

故

$$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$$

即意为 t_0 至 t_2 的状态转移过程可分解为 t_0 至 t_1 及 t_1 至 t_2 的分段转移过程。

④ 可逆性

e^{At} 总是非奇异的, 必有逆存在。

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$\Phi^{-1}(t - t_0) = \Phi(t_0 - t)$$

因为

$$\Phi(t - t_0)\Phi(t_0 - t) = \Phi(t - t) = I$$

故

$$\Phi^{-1}(t - t_0) = \Phi(t_0 - t)$$

如果将 $\mathbf{x}(t)$ 看成起点, $\mathbf{x}(t_0)$ 看成终点, 则有

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

故

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi^{-1}(t - t_0)\mathbf{x}(t)$$

⑤ 分解性

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

因为

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_2 - (-t_1)) = \Phi(t_2 - 0)\Phi(0 - (-t_1)) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

或

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1 - (-t_2)) = \Phi(t_1 - 0)\Phi(0 - (-t_2)) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$$

故

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

⑥ 倍时性

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

在性质⑤中, 令 $t_1 = t_2 = \dots = t_k = t$, 则有

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

⑦ 对于 $n \times n$ 矩阵 A 和 B , 若 $AB=BA$, 则有

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$$

因为, 若 $AB=BA$, 则

$$\begin{aligned} e^{(A+B)t} &= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A+B)^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!}(A+B)^k t^k + \dots \\ &= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}(A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3)t^3 + \dots \\ &= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2)t^2 + \frac{1}{3!}(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)t^3 + \dots \end{aligned}$$

而

$$e^{At}e^{Bt} = \left[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \right] \left[I + Bt + \frac{1}{2!}B^2t^2 + \frac{1}{3!}B^3t^3 + \dots \right]$$

$$= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2)t^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2\mathbf{B} + 3\mathbf{AB}^2 + \mathbf{B}^3)t^3 + \dots$$

故有

$$\mathbf{e}^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{e}^{\mathbf{B}t} = \mathbf{e}^{\mathbf{B}t}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$$

从上述证明过程中, 也可看出, 如 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, 则一般有

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{e}^{\mathbf{B}t} \neq \mathbf{e}^{\mathbf{B}t}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$$

(3) 状态转移矩阵的计算

在状态方程求解的过程中, 关键是对状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的计算。下面介绍常用的计算方法, 并举例说明其计算过程。

① 直接计算法

即按定义式

$$\Phi(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k$$

进行计算。

对所有有限时间 t 值来说, 这个无穷级数都是收敛的。通常, 基于定义法只能得到数值结果, 难以获得解析表达式。但如果采用计算机计算, 这种方法具有编程简便和迭代算法的优点。

例 4.2.1 给定系统矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求状态转移矩阵。

解 由定义

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -t^3 \\ t^3 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

② 拉氏反变换法

对于给定的 $n \times n$ 矩阵 \mathbf{A} , $\Phi(t)$ 的计算可由下式给出

$$\Phi(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

例 4.2.2 试求如下线性定常系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 和状态转移矩阵的逆 $\Phi^{-1}(t)$ 。

解 对于该系统, 由于

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\begin{aligned}
 (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

因此

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

由 $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, 可求得状态转移矩阵的逆为

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-At} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

③ 若矩阵 \mathbf{A} 为完全对角阵, 系统矩阵 \mathbf{A} 有 n 个不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} t^2 + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} t^2 + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2!}\lambda_2^2 + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \dots \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

④ 若矩阵 \mathbf{A} 为约当块, 对应的 n 重根为 λ , 则

$$e^{At} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda t & t & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda t & t & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda t \end{bmatrix} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 & \lambda t^2 & \frac{1}{2!} t^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 & \lambda t^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2!} t^2 & \end{bmatrix} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 + \cdots\right) & t \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 + \cdots\right) & \frac{1}{2!} t^2 \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 + \cdots\right) & \cdots & 0 \\ 0 & \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 + \cdots\right) & t \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 + \cdots\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!} \lambda^2 t^2 + \cdots\right) \end{bmatrix} \\
&= e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!} t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} t^{(n-1)} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} t^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

⑤ 特征值法

若矩阵 A 有相异的 n 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 存在状态变换阵 T , 经 $x = T\tilde{x}$ 非奇异变换后, 使得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

此时有

$$T^{-1}AT = \tilde{A}$$

则

$$A = T\tilde{A}T^{-1}$$

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + T\tilde{A}T^{-1}t + \frac{1}{2!}(T\tilde{A}T^{-1})^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T\tilde{A}T^{-1})^k t^k + \cdots \\
&= TT^{-1} + T\tilde{A}T^{-1}t + \frac{1}{2!}(T\tilde{A}^2T^{-1})t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T\tilde{A}^kT^{-1})t^k + \cdots \\
&= T\left(I + \tilde{A}t + \frac{1}{2!}\tilde{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\tilde{A}^k t^k + \cdots\right)T^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T e^{\tilde{A}t} T^{-1} \\
&= T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}
\end{aligned}$$

若矩阵 A 有 n 重根。此时，与系统矩阵 A 有 n 个不相等的特征根时的差异仅在于状态变换阵 T 的不同，经 $x = T\tilde{x}$ 非奇异变换后，使得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

此时有

$$T^{-1}AT = \tilde{A}$$

则

$$\begin{aligned}
A &= T\tilde{A}T^{-1} \\
e^{At} &= I + T\tilde{A}T^{-1}t + \frac{1}{2!}(T\tilde{A}T^{-1})^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T\tilde{A}T^{-1})^k t^k + \cdots \\
&= TT^{-1} + T\tilde{A}T^{-1}t + \frac{1}{2!}(T\tilde{A}^2T^{-1})t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(T\tilde{A}^kT^{-1})t^k + \cdots \\
&= T\left(I + \tilde{A}t + \frac{1}{2!}\tilde{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\tilde{A}^k t^k + \cdots\right)T^{-1} \\
&= T e^{\tilde{A}t} T^{-1} \\
&= T e^{\tilde{A}t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{(n-1)} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} T^{-1}
\end{aligned}$$

例 4.2.3 已知系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

试求系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。

解：对于该系统，由于

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

变换阵及其逆矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{A^t} &= \mathbf{T} \mathbf{e}^{J^t} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2t\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{2t} & 2\mathbf{e}^t + 3t\mathbf{e}^t - 2\mathbf{e}^{2t} & -\mathbf{e}^t - t\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{2t} \\ -2\mathbf{e}^t - 2t\mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{2t} & 5\mathbf{e}^t + 3t\mathbf{e}^t - 4\mathbf{e}^{2t} & -2\mathbf{e}^t - t\mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{2t} \\ -4t\mathbf{e}^t - 2t\mathbf{e}^{2t} + 4\mathbf{e}^{2t} & 8\mathbf{e}^t + 3t\mathbf{e}^t - 8\mathbf{e}^{2t} & -3\mathbf{e}^t - t\mathbf{e}^t - 4\mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 凯莱-哈密顿 (Caley-Hamilton) 方法

由凯莱-哈密顿定理可知

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.2.3)$$

则 \mathbf{A} 的所有高于 $n-1$ 次的幂都可以由 \mathbf{A} 的 $0 \sim (n-1)$ 次幂线性表出, 即

$$\mathbf{A}^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathbf{A}^j$$

将其代入 \mathbf{e}^{A^t} 的定义中, 则

$$\mathbf{e}^{A^t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \mathbf{A}^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathbf{A}^j = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} a_j$$

令 $a_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} a_j$, 即可得到

$$\mathbf{e}^{A^t} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \mathbf{A}^j = a_0(t) \mathbf{I} + a_1(t) \mathbf{A} + \cdots + a_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}$$

其中, $a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ 为 t 的标量函数, 可按 \mathbf{A} 的特征值确定。

① \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 两两相异时, 有

$$\mathbf{e}^{\lambda_i t} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}^{A^t} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} (a_0(t) \mathbf{I} + a_1(t) \mathbf{A} + \cdots + a_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}) \mathbf{T}$$

注意到

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^i \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{i \uparrow} \mathbf{T} = \underbrace{(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \cdots (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})}_{i \uparrow} = \tilde{\mathbf{A}}^i$$

有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = a_0(t) + a_1(t) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} + \cdots + a_{n-1}(t) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^{n-1}$$

则

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

② A 的特征值 λ 为 n 重根时, 只有一个方程, 为

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda^{n-1} = e^{\lambda t}$$

缺少 $n-1$ 个独立方程, 故需要对上式求导 $n-1$ 次, 得到其余 $n-1$ 个方程为

$$\begin{aligned} a_1(t) + 2\lambda a_2(t) + \cdots + a_{n-1}(t)(n-1)\lambda^{n-2} &= t e^{\lambda t} \\ 2a_2(t) + 3 \times 2\lambda a_3(t) + \cdots + a_{n-1}(t)(n-1)(n-2)\lambda^{n-3} &= t^2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ a_{n-1}(t)(n-1)(n-2) \cdots 1\lambda &= t^{n-1} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

则

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-3}(t) \\ a_{n-2}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda^{n-3} & \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & \frac{n-1}{1!}\lambda^{n-2} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t} \\ \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

例 4.2.4 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A 的状态转移矩阵。

解 由

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

求得 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ 。所以

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

求得矩阵指数函数为

$$\begin{aligned} e^{At} &= a_0(t)I + a_1(t)A \\ &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.3 线性定常非齐次状态方程的求解

(1) 线性定常非齐次状态方程的求解

当系统具有 $\mathbf{u}(t)$ 输入作用时, 其非齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^p, \mathbf{A} \in R^{n \times n}, \mathbf{B} \in R^{n \times p}$, 且初始条件为 $\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0)$ 。

将状态方程写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

两边左乘 e^{-At} , 可得

$$e^{-At}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-At}\mathbf{x}(t)] = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

将上式由 0 积分到 t , 得

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

故可求出其解为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (4.3.1)$$

式中, $\Phi(t) = e^{At}$ 为系统的状态转移矩阵。

当初始条件为 $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$ 时, 有

$$\begin{aligned}e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau)|_{t_0}^t &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ e^{-At}\mathbf{x}(t) - e^{-At_0}\mathbf{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}(t) &= e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (4.3.2)$$

例 已知系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

试求当输入 $u = \sin t + \cos t$, 且

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求系统的输出。

解 由

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

得

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}
 y &= \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau \\
 &= (1+t)e^{-t} + \int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}(\sin t + \cos t)d\tau \\
 &= \frac{3}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t
 \end{aligned}$$

(2) 特定输入下的状态响应

① 脉冲响应

当 $u(t) = \delta(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 时, 由式 (4.3.1) 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_{0^-}^{0^+} e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau + \int_{0^+}^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_{0^-}^{0^+} e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At}\mathbf{B}
 \end{aligned}$$

② 阶跃响应

当 $u(t) = 1(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 时, 由式 (4.3.1) 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B} \times 1(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}d\tau \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\mathbf{B}d\tau = e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}(e^{-A\tau}|_0^t)\mathbf{B} = e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}(e^{-At} - \mathbf{I})\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}(e^{At} - \mathbf{I})\mathbf{B}
 \end{aligned}$$

③ 斜坡响应

当 $u(t) = t \times 1(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 时, 由式 (4.3.1) 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\tau d\tau \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\tau d\tau \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}\int_0^t \tau de^{-A\tau}\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}\left(\tau e^{-A\tau}|_0^t + \int_0^t e^{-A\tau}d\tau\right)\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}\left(te^{-At} - A^{-1}\int_0^t de^{-A\tau}\right)\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}(te^{-At} - A^{-1}e^{-A\tau}|_0^t)\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) - A^{-1}e^{At}[te^{-At} - A^{-1}(e^{-At} - \mathbf{I})]\mathbf{B} \\
 &= e^{At}\mathbf{x}(0) + [A^{-2}(e^{-At} - \mathbf{I}) - A^{-1}t]\mathbf{B}
 \end{aligned}$$

4.4 连续系统的时间离散化

随着计算机技术在系统分析和控制中的广泛应用, 对离散时间系统的运动分析和设计已经变得越来越重要。无论是采用数字控制装置对连续时间系统作实时控制, 还是采用数字计算

机分析连续时间系统的运动行为，都会遇到把连续时间系统化为等价离散时间系统的问题，通常称这类问题为连续时间系统的时间离散化。线性连续时间系统状态方程离散化的实质是将矩阵微分方程化为矩阵差分方程，它是描述多输入多输出离散时间系统的一种数学模型。因此，我们需要分析线性连续时间系统状态方程的离散化问题以及离散时间线性系统的运动分析问题。

所谓连续时间线性系统的时间离散化问题，就是基于一定的采样方式和保持方式，由系统的连续时间状态空间描述导出相应的离散时间状态空间描述，并对两者的系数矩阵建立对应的关系式。对连续时间线性系统的时间离散化系统，随着采样方式和保持方式的不同，通常其状态空间描述也不同。为使系统的时间离散化状态空间描述具有简单形式，并使离散化变量在原理上是可复现的，我们对采样方式和保持方式作如下约定：

(1) 离散方式是普通的周期性采样。即采样是等间隔进行的，采样周期为 T ；采样脉冲宽度远小于采样周期，因而可以忽略不计；在采样间隔内函数值为零。

(2) 采样周期 T 的选择满足香农采样定理。即离散函数满足复原为连续函数的条件： $\omega_s > 2\omega_c$ ，或 $T < \pi / \omega_c$ ，其中 $\omega_s = 2\pi / T$ 为采样频率， ω_c 为连续函数频谱的上限频率。

(3) 保持器为零阶保持器。

在上述基本约定的前提下，可以得出连续时间线性系统时间离散化问题的基本关系式。

4.4.1 连续时间线性系统的离散化模型

线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

设 $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$ ，得到

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

当 $kT < t < (k+1)T$ 时， $\mathbf{u}(t)$ 为零阶保持器的输出，故在时间区间 $[kT, (k+1)T]$ 上， $\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}(kT)$ 。令 $t = (k+1)T - \tau$ ，则在 $t \in [T, 0]$ 段， $dt = -d\tau$ ，故

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]d\tau \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \\ &= \Phi(T)\mathbf{x}(kT) - \int_T^0 \Phi(t)dt \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \\ &= \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + \left(\int_0^T \Phi(t)dt \right) \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \end{aligned}$$

故离散化模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \end{cases} \quad (4.4.1)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{G}(T) = \Phi(T) = e^{AT} \\ \mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T \Phi(t)dt \right) \mathbf{B} = \left(\int_0^T e^{At}dt \right) \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.4.2)$$

4.4.2 连续时间线性系统近似离散化模型

在采样周期 T 较小时（当其小于系统最小时间常数的 $1/10$ 时），按照导数定义，有

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \frac{\mathbf{x}[(k+1)T] - \mathbf{x}[kT]}{T}$$

则

$$\frac{\mathbf{x}[(k+1)T] - \mathbf{x}[kT]}{T} = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT)$$

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = (\mathbf{I} + \mathbf{A}T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}T\mathbf{u}(kT)$$

即

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{G}(T) = \mathbf{I} + \mathbf{A}T \\ \mathbf{H}(T) = \mathbf{B}T \end{cases}$$

例 连续时间系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

当采样周期为 T 时，建立系统的离散化模型。

解 连续系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{G}(T) = \Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T \Phi(t) dt \right) \mathbf{B} = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T + \frac{1}{4}e^{-2T} - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}T = \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & -2T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1-2T \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B}T = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.5 线性离散系统的运动分析

对离散时间线性系统的运动分析，数学上归结为求解线性离散状态方程

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (4.5.1)$$

与连续时间系统的状态方程相比，离散时间系统的状态方程的求解在计算机上要简单得多，而且更宜于用计算机进行计算。

离散时间系统状态方程的求解有迭代法和 z 变换法。迭代法对线性定常系统和时变系统都适用，而 z 变换法只能用于求解定常系统。

4.5.1 迭代法

迭代法是一种递推的数值解法，其基本思路是：基于系统的状态方程，利用给定的或确定出的上一采样时刻状态值，迭代地确定出下一采样时刻的系统状态。

设式 (4.5.1) 表示离散系统的初始状态为 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ，各个采样系统的输入为 $u(0), u(1), u(2), \dots$ 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}u(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}u(0) + \mathbf{H}u(1) \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}u(2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}u(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}u(1) + \mathbf{H}u(2) \\ &\vdots\end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}u(j) \quad (4.5.2)$$

几点说明：

(1) 解的表达式的状态轨迹的包络线是状态空间中的一条离散轨迹线，它与连续系统状态的解很相似。解的第一部分只与系统的初始状态有关，它是由起始状态引起的自由运动分量；第二部分是由输入的各次采样信号引起的强迫分量，其值与控制作用 \mathbf{u} 的大小、性质及系统的结构有关。

(2) 在输入引起的响应中，第 k 个时刻的状态只取决于所有此刻前的输入采样值，与第 k 个时刻的输入采样值无关。

(3) 与连续时间系统对照，在离散时间系统中，状态转移矩阵定义为 \mathbf{G}^k ，则有

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= \mathbf{G}^k \\ \Phi(k+1) &= \mathbf{G}\Phi(k) \\ \Phi(0) &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

利用状态转移矩阵，状态方程的解可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\mathbf{H}u(i) \\ &= \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)\mathbf{H}u(k-j-1)\end{aligned}$$

上述算法具有递推特点，容易编程并适于采用计算机进行计算。由于后一步计算依赖于前一步计算结果，则计算过程中引入的误差会形成累积性误差。

例 4.5.1 已知线性定常离散时间系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

给定初始状态为

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

求该离散系统在单位阶跃输入下状态方程的解。

解 由于输入为单位阶跃函数，所以 $k=0,1,2,\dots$ 时， $u(k)=1$ ，故

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}u(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}u(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2.84 & 0.16 & \cdots \\ -1 & 1.84 & -0.84 & 1.386 & \cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然，迭代法求得的是一个序列解，而不是一个封闭的解析形式。

4.5.2 z 变换法求解

对于线性定常离散系统，我们也可以采用 z 变换法来求解状态方程，设线性定常离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (k=0,1,2,\dots)$$

两边取 z 变换，得

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) &= \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}U(z) \\ (z\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{X}(z) &= z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z) \\ \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}U(z) \\ &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}U(z)] \end{aligned}$$

进行 z 反变换，有

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} z]\mathbf{x}(0) + Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}U(z)] \quad (4.5.3)$$

由解的表达式 (4.5.3) 可以看出，线性离散系统状态方程的解和连续系统类似，也由两部分组成。第一部分是由初始状态引起的响应，是系统运动的自由分量；第二部分是由各采样时刻的输入信号引起的响应，是系统运动的强迫分量。

设

$$Z[\mathbf{G}^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{G}^k z^{-k} = \mathbf{I} + \mathbf{G}z^{-1} + \mathbf{G}^2 z^{-2} + \cdots \quad (4.5.4)$$

两边同乘 $\mathbf{G}z^{-1}$ ，则

$$\mathbf{G}z^{-1}Z[\mathbf{G}^k] = \mathbf{G}z^{-1} + \mathbf{G}^2 z^{-2} + \cdots \quad (4.5.5)$$

式 (4.5.4) 减去式 (4.5.5) 得

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})Z[\mathbf{G}^k] = \mathbf{I}$$

所以

$$Z[\mathbf{G}^k] = (\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1})^{-1} = \left(\frac{z\mathbf{I} - \mathbf{G}z^{-1}z}{z} \right)^{-1} = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z \quad (4.5.6)$$

即

$$\mathbf{G}^k = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z] \quad (4.5.7)$$

例 4.5.2 用 z 变换法求解例 4.5.1。

解 由于输入为单位阶跃函数，所以有

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

将 \mathbf{G} 、 \mathbf{H} 、 $U(z)$ 、 $\mathbf{x}(0)$ 代入 $\mathbf{x}(k)$ 的 z 变换式有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z/(z-1) \\ z/(z-1) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{17}{6} \left(\frac{z}{z+0.2} \right) + \frac{22}{9} \left(\frac{z}{z+0.8} \right) + \frac{25}{18} \left(\frac{z}{z-1} \right) \\ \frac{3.4}{6} \left(\frac{z}{z+0.2} \right) - \frac{17.6}{9} \left(\frac{z}{z+0.8} \right) + \frac{7}{18} \left(\frac{z}{z-1} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对上式进行 z 反变换，有

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[\mathbf{X}(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}$$

4.6 利用 MATLAB 进行线性系统的运动分析

1. 计算线性定常系统的矩阵指数

采用拉氏变换法求解矩阵指数，可调用 MATLAB 符号数学工具箱（Symbolic Math Toolbox）中的符号运算函数先计算 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ，再对其进行拉普拉斯反变换求得 \mathbf{e}^{At} 。另外，MATLAB 符号数学工具箱中专用于计算矩阵指数的指令 `expm()` 可调用。

例 4.6.1 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，求 \mathbf{e}^{At} 。

解

方法一 基于拉普拉斯变换求 \mathbf{e}^{At} 。

<code>syms s t</code>	%定义基本符号变量 s 和 t
<code>A=[4,0,0;0,3,1;0,1,3];</code>	
<code>FS=inv(s* eye(3)-A);</code>	%求预解矩阵 $\mathbf{FS} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ， <code>eye(3)</code> 位 3×3 单位阵
<code>eAt=ilaplace(FS,s,t);</code>	%求 $\mathbf{e}^{At} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$
<code>eAt=simplify(eAt)</code>	%化简 \mathbf{e}^{At} 的表达式

几点说明:

① `inv()` 为符号矩阵求逆指令, 其与数值矩阵求逆指令在形式上无异, 事实上在 MATLAB5.x 及以上版本中的 Symbolic Math Toolbox2.1, 构成符号计算的算符及基本函数在形状、名称、使用方法上与数值计算几乎完全相同。

② 求时域函数 `ft=ilaplace(Fs,st)`, MATLAB 6.x 中的 `Laplace()` 及 `ilaplace()` 指令能对符号函数矩阵起作用。应强调指出, 正确定义基本的符号对象是正确进行符号运算的前提, 故在指令调用前, 应先进行符号变量 `t`、`s` 及符号表达式 `Fs`、`ft` 的定义。

③ `simplify()` 指令起简化符号计算结果表达式的作用, 为了得到简化的符号计算结果表达式, 常调用该指令或同类指令 `simple()`。

方法二 调用 `expm()` 求 e^{At} 的 MATLAB 程序。

```
syms t
A=[4,0,0;0,3,1;0,1,3];
eAt=expm(A*t)
```

2. 计算线性定常离散系统状态转移矩阵

求线性定常离散系统状态转移矩阵解析式的 z 变换法, 可调用 MATLAB 符号工具箱中的符号运算函数编程实现。

例 4.6.2 已知线性定常离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

应用 MATLAB 求其状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 的解析式。

解

```
syms z k          %定义基本符号变量 z 和 k
G=[0,1;-0.2,-0.9];
Fz=(inv(z*eye(2)-G))*z;    %求 (zI - G)-1z
Fk=iztrans(Fz,z,k)        %调用 z 反变换指令求 Z-1[(zI - G)-1z]
Fk=simple(Fk)            %将符号运算结果表达式转换为最简形式
```

程序运行结果如下:

```
Fk =
[ 5*(-2/5)^k - 4*(-1/2)^k, 10*(-2/5)^k - 10*(-1/2)^k]
[ 2*(-1/2)^k - 2*(-2/5)^k, 5*(-1/2)^k - 4*(-2/5)^k]
```

3. 线性定常系统时间响应

在求解线性系统的状态响应时, 可以利用 `initial`, `dinitial`, `lsim`, `step`, `dstep`, `impulse`, `dimpulse` 等命令。下面举例说明。

例 4.6.3 已知线性定常系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(1) 求系统的单位阶跃响应曲线。

(2) 若系统初始条件为 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$ ，试求该系统的零输入响应曲线。

解 (1) MATLAB 命令如下：

```
>> A=[-1 -1;6.5 0];B=[1 1;1 0];C=[1 0;0 1];D=[0 0;0 0];
>> step(A,B,C,D)
```

系统输出量的单位阶跃响应曲线如图 4.2 所示。

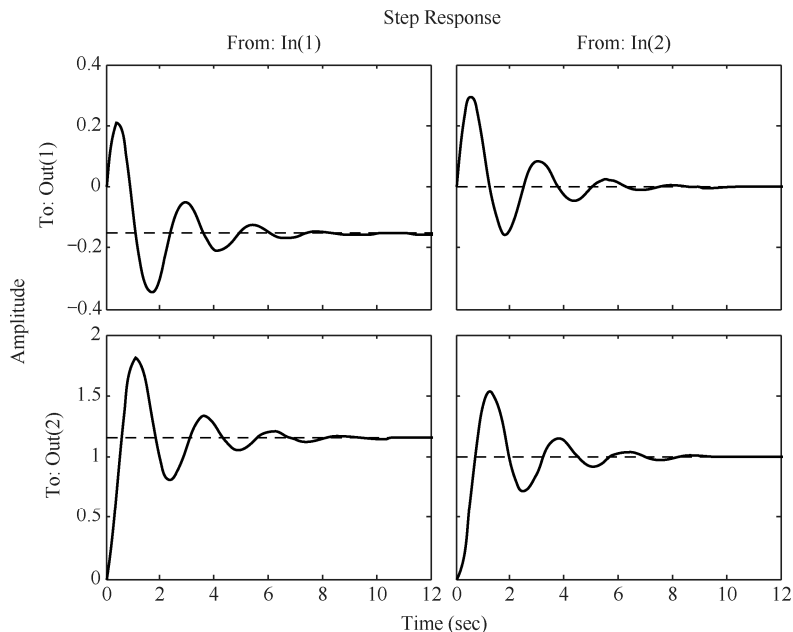


图 4.2 系统的单位阶跃响应曲线

(2) MATLAB 命令如下：

```
>> A=[-1 -1;6.5 0];B=[1 1;1 0];C=[1 0;0 1];D=[0 0;0 0];x0=[1;0];
>> initial(A,B,C,D,x0)
```

求得系统的零输入响应曲线如图 4.3 所示。

例 4.6.4 利用 MATLAB 求状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

在初始条件 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ 下的解。

解 因矩阵指数 e^{At} 和系统状态方程解的数学表达式为

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots \\ \mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

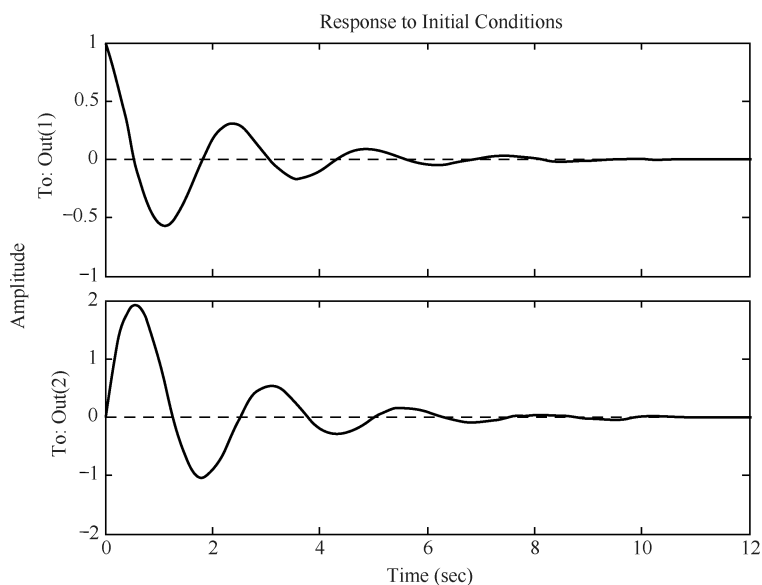


图 4.3 系统的零输入响应曲线

根据以上表达式和初始条件 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ 可得 MATLAB 命令如下：

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6];x0=[1;1;1];
t=0:0.1:10;
for i=1:length(t)
    x(:,i)=expm(A*t(i))*x0
end
plot(t,x(1,:),t,x(2,:),t,x(3,:))
```

利用以上程序可得在初始条件 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ 下，系统状态方程的解如图 4.4 所示。

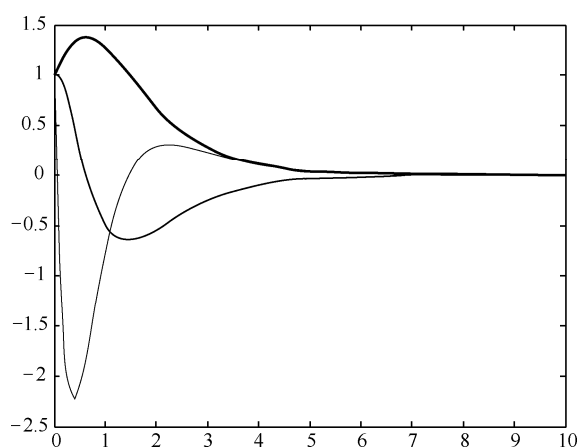


图 4.4 系统状态方程的解

4. 线性系统状态方程求解

例 4.6.5 已知线性系统齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

初始条件为 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。求系统状态方程的解。

解

collect()函数的作用是合并同类项,而 ilaplace()函数的作用是求拉普拉斯逆变换,函数 det()的作用是求方阵的行列式。MATLAB 命令如下:

```
syms s t x0 x tao phi phi0;
A=[0 1;-2 -3];I=[1 0;0 1];
E=s*I-A;C=det(E);D=collect(inv(E));
phi0=ilaplace(D);
x0=[1;0];x=phi0*x0
```

结果显示

```
phi0 =
[ 2/exp(t) - 1/exp(2*t), 1/exp(t) - 1/exp(2*t)]
[ 2/exp(2*t) - 2/exp(t), 2/exp(2*t) - 1/exp(t)]
x =
2/exp(t) - 1/exp(2*t)
2/exp(2*t) - 2/exp(t)
```

表示为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

例 4.6.6 已知线性非齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1(t)$$

求系统状态方程的解。

解

phi=subs(phi0, 't', (t-tao)) 表示将符号变量 phi0 中的自变量 t 用 (t-tao) 代换就构成了符号变量 phi, 而语句 x2=int(F, tao, 0, t) 表示符号变量 F 对 tao 在 0 到 t 的积分区间上求积分, MATLAB 命令如下:

```
syms s t x0 x tao phi phi0;
A=[0 1;-2 -3];I=[1 0;0 1];B=[0;1];
E=s*I-A;C=det(E);D=collect(inv(E));
phi0=ilaplace(D);x0=[1;0];x1=phi0*x0;
phi=subs(phi0,'t',(t-tao));
```

```
F=phi*B*1;x2=int(F,tao,0,t);
x=collect(x1+x2)
```

结果显示

```
x =
1/exp(t) - 1/(2*exp(2*t)) + 1/2
1/exp(2*t) - 1/exp(t)
```

表示为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 0.5e^{-2t} + 0.5 \\ e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

5. 连续状态空间模型化为离散状态空间模型

MATLAB Control System Toolbox 提供的 `c2d()` 函数可以简化线性定常数连续状态方程离散化系数矩阵的求解，其调用格式为

$$[\mathbf{G}, \mathbf{H}] = \text{c2d}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, T)$$

其中， T 为采样周期。

例 4.6.7 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，应用 MATLAB 的 `c2d()` 函数求解连续被控对象的离散状态方程。

解：对连续被控对象离散化系数矩阵的程序：

```
syms T %定义基本符号变量 T（采样周期）
A=[0,1;-2,-3];
B=[0;1];
[G,H]=c2d(A,B,T)
```

若要求连续被控对象在采样周期 $T=0.1\text{s}$ 时的离散化状态方程，程序为：

```
T=0.1;
A=[0,1;-2,-3];
B=[0;1];
[G,H]=c2d(A,B,T)
```

程序结果如下：

```
G =
0.9909    0.0861
-0.1722    0.7326

H =
```

与其他的变换类似， $d2c$ 、 $d2cm(\cdot)$ 分别为 $c2d(\cdot)$ 、 $c2dm(\cdot)$ 的逆过程，其完成从离散时间系统到连续时间系统的变化。

思考题与习题

4.1 设 A 和 B 为同维方阵，且满足

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$$

试写出满足上式的矩阵 A 、 B 。

4.2 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ，试计算 e^{At} 。

4.3 计算下列矩阵 A 的矩阵指数 e^{At} 。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4.4 给定线性定常系统

$$\dot{x} = Ax$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

且初始条件为

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

试求该齐次状态方程的解 $x(t)$ 。

4.5 试求下列系统矩阵 A 对应的状态转移矩阵。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad (5) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6) A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

4.6 下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件，如果满足，试求与之相应的 A 阵。

$$(1) \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(2) \Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \\ -e^{-t} + e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$$

4.7 已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

初始状态 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，输入 $u(t)$ 为单位阶跃函数时，求系统的输出。

4.8 已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

且初始状态 $\mathbf{x}(0) = [0 \quad 1]^T$ ，输入量 $u(t) = e^{-t} (t \geq 0)$ ，试求系统的输出响应。

4.9 线性定常系统齐次状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ ，已知 $t=1s$ 时状态为 $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.1353 \\ -0.1353 \end{bmatrix}$ ，

求 $t=0s$ 、 $2s$ 及 $3s$ 时的状态 $\mathbf{x}(0)$ 、 $\mathbf{x}(2)$ 、 $\mathbf{x}(3)$ 。

4.10 给定一个线性定常系统，如果已知状态转移矩阵为 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，

$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。系统的输入 $u(t)$ 分别为：(1) $u(t) = \delta(t)$ (单位脉冲函数)；(2) $u(t) = 1(t)$ (单位阶跃函数)；(3) $u(t) = t \times 1(t)$ (单位斜坡函数)。试求相应的状态响应 $\mathbf{x}(t)$ 。

4.11 已知线性离散定常系统为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k)$$

设控制 $u(k)$ 为单位阶跃序列，即

$$u(k) = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

试求系统的状态响应 $\mathbf{x}(k)$ 。

4.12 已知离散系统的状态方程式为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

求系统的状态转移矩阵。

4.13 离散系统的结构框图如图 4.5 所示。

(1) 试求系统离散化的状态空间表达式。

(2) 当采样周期为 $T=1s$ ，输入为单位阶跃函数，其初始条件为零时，试求离散系统的输出 $y(k)$ 。

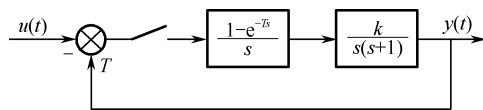


图 4.5 离散系统的结构框图

第5章 线性控制系统的能控性和能观测性

动态系统的能控性和能观测性是系统的两个基本结构特性。随着状态空间分析方法的引入,卡尔曼在 20 世纪 60 年代初首先提出和研究了能控性和能观测性这两个重要的关于系统不变结构特性的概念。控制理论的发展表明,这两个概念对于控制和状态估计问题的研究,如最优控制和最佳估计问题的研究,有着极其重要的意义。系统能控性是指控制作用对被控系统的状态和输出进行控制的可能性;而能观测性则反映系统直接测量输入输出量的量测值以确定系统状态的可能性。

如前所述,动力学系统的状态空间描述法与经典控制理论中的传递函数法不同,它是把系统的输入输出关系分为如图 5.1 所示的两段来处理。第一段为状态方程,它描述输入 $u(t)$ 引起状态 $x(t)$ 的变化;第二段是输出方程,它描述状态 $x(t)$ 的变化所引起输出 $y(t)$ 的变化。如果给定一确定的输入 $u(t)$ 和初始状态 $x(t)$,我们可以根据上一章状态方程的求解公式求出其状态响应 $x(t)$, 输出响应 $y(t)$,但是在系统分析中除上述定量分析外,还有另外一类定性分析问题。在定性分析研究中所感兴趣的是系统的内在特性,线性系统的能控性和能观测性就是描述系统内在特性的两个概念。它们分别回答“输入能否控制状态的变化”和“状态的变化能否由输出反映出来”这样两个问题。

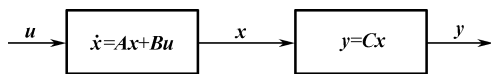


图 5.1 系统输入输出关系

5.1 线性定常连续系统的能控性

图 5.2 (a) 是一个 RC 桥形电路,这里 $C_1 = C_2$, $R_1 = R_2$, 设电容 C_1 上的电压被选作状态变量 x_1 , C_2 上的电压为状态变量 x_2 , 且设电容 C_1 , C_2 上的初始电压为零,根据电路理论,下式成立

$$x_1(t) = x_2(t)$$

它的相平面示于图 5.2 (b) 中,相轨迹为一直线,电源电压无论如何变化,上式总是成立,因此系统状态只能在 $x_1 - x_2$ 相平面的一条直线上移动,不论电源电压如何变动,都不能使系统的状态变量离开这条直线。显然,它是不完全能控的。

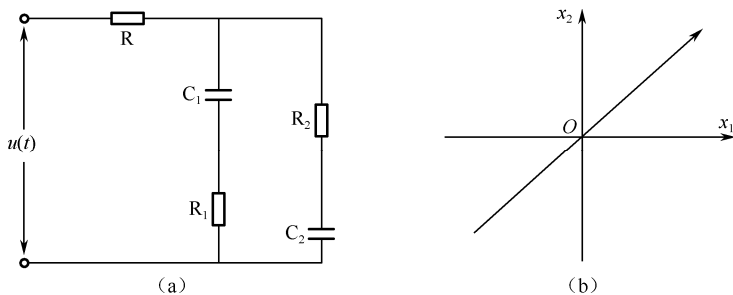


图 5.2 RC 桥形电路及其状态量示意图

定义 5.1

设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.1.1)$$

式中, \mathbf{x} ——状态向量, 是 $n \times 1$ 阶阵;

\mathbf{u} ——控制向量, 是 $r \times 1$ 阶阵;

\mathbf{A} ——状态矩阵, 是 $n \times n$ 阶阵;

\mathbf{B} ——输入矩阵, 是 $n \times r$ 阶阵。

如果在有限时间间隔 $t_0 \leq t \leq t_1$ 内, 存在一个无约束的控制信号 $\mathbf{u}(t)$, 能使该系统从初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到任何一个状态 (目标或终止状态) $\mathbf{x}(t)$, 则称系统在 $t = t_0$ 时状态可控, 如果对于任何 t_0 下的初态都能控, 则称这个系统为状态完全可控, 如果系统中有一个或几个状态变量不能控, 则称这一状态为不能控, 或状态不完全能控。

通常为方便起见, 也把状态完全可控性定义为, 在有限的时间间隔内, 存在一个无约束的控制信号 $\mathbf{u}(t)$, 能使系统从任意一个初始状态转移到平衡状态。一个系统是否能控的判断标准不是唯一的, 下面给出具体的能控性判据。

(1) 能控性判据一

定理 5.1a 如下定义的能控性矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

满秩, 即

$$\text{rank} \mathbf{M}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (5.1.2)$$

则该系统是状态完全能控的。

例 5.1.1 判断如下单输入系统的状态能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

解 状态能控性的代数判据有

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1 \\ -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

故

$$\text{rank} \mathbf{M}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix} = 3 = n$$

因此, 该系统状态完全能控。

例 5.1.2 试判断如下系统的状态能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

解 由状态能控性的代数判据有

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

对该能控性矩阵判定秩,较简便的方法是对行进行初等变换。例如,将上述矩阵的第2行加到第3行中去,则可得矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然其秩为2。而系统的状态变量的维数 $n=3$, 所以状态不完全能控。

(2) 能控性判据二

定理 5.1b 由式 (5.1.1) 描述的线性定常系统完全能控的充分必要条件是:

1) 当矩阵 \mathbf{A} 为对角标准型, 且对角元素均不相同时, 对应的 \mathbf{B} 阵无元素全为零的行。

2) 当矩阵 \mathbf{A} 为约当标准型, 且每个约当块所对应的特征值均不相同时, 对应的 \mathbf{B} 阵中与每个约当块最后一行所对应的各行无元素全为零的行。

例 5.1.3 判断下列系统的能控性。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$(4) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解 (1)、(2) 是对角标准型, (1) 的 \mathbf{B} 阵中无元素全零的行, 故系统完全能控; (2) 中 \mathbf{B} 阵第二行元素全零, 故系统不完全能控。 (3)、(4) 是约当标准型, (3) 中约当块

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

最后一行和单根-2 对应的 \mathbf{B} 阵相应的行均不是零向量, 故系统完全能控; (4) 中约当块

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

最后一行对应的 \mathbf{B} 阵相应行为零向量, 故系统不完全能控。

这里还需要指出一点: 当系统矩阵 \mathbf{A} 为对角形但含有相同元素的 (特征值相同但仍能对角化) 情况下, 上述定理 5.1b 的 1) 不成立; 若矩阵 \mathbf{A} 的约当标准型中有两个约当块的特征

值相同, 则定理 5.1b 的 2) 不成立。读者若有兴趣深入学习这方面的内容, 可参阅陈启荣著《线性系统的理论与设计》一书的有关内容。

例 5.1.4 线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

\mathbf{A} 为约当型, 但有两个相同特征值的约当块, \mathbf{B} 阵虽对应于约当块最后一行不全为全零行, 但仍是不能控的。

(3) 输出能控性

在分析和设计控制系统的许多情况中, 系统的被控制量往往不是系统的状态变量, 而是系统的输出变量。因此, 有必要研究 MIMO 系统的输出能否控制的问题。下面先给出线性定常系统输出能控性的定义。

定义 5.2 若线性定常连续系统, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

对初始时刻 t_0 ($t_0 \in T$, T 为系统的时间定义域) 和任意初始输出值 $\mathbf{y}(t_0)$, 存在另一有限时刻 t_1 ($t_1 > t_0, t_1 \in T$), 可以找到一个输入控制向量 $\mathbf{u}(t)$, 能在有限时间 $[t_0, t_1]$ 内把系统从初始输出值 $\mathbf{y}(t_0)$ 控制到原点, 即 $\mathbf{y}(t_1) = 0$, 则称系统输出完全能控, 简称为系统输出能控。

(4) 判定输出完全能控的充要条件

可以证明 m 维输出系统完全能控的充要条件是输出可控阵

$$\mathbf{M}_{\text{cy}} = [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}]$$

满秩, 即

$$\text{rank}[\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] = m$$

例 5.1.5 考察线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [1 \quad -1] \mathbf{x} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

因为

$$\mathbf{CB} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = -6$$

$$\mathbf{CAB} = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -4 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 30$$

$$\mathbf{D} = 1$$

所以

$$[\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{D}] = [-6 \quad 30 \quad 1]$$

$$\text{rank}[\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{D}] = 1 = m$$

说明系统是输出完全能控的。但是

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 25 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[B \quad AB]=1$$

说明系统是状态不完全能控的。

这个例子说明，一般情况下，输出能控性和状态能控性之间是不等价的，即输出能控不能导致状态能控，而状态能控也不能必然导致输出能控。

5.2 线性连续系统的能观测性

在图 5.3 中，选择电感中的电流 i_L 及电容上的电压 u_C 作为状态变量。当电桥平衡时， i_L 作为电路的一个状态是不能由输出变量 u_C 来确定的，所以该电路是不能观测的。

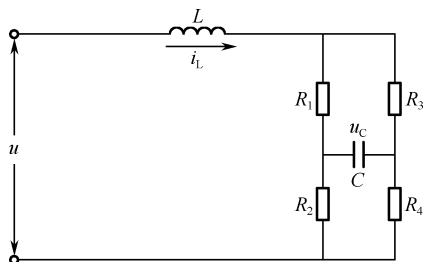


图 5.3 RLC 桥形电路

设线性时不变系统的状态方程和输出方程是

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

如果对任意给定的输入 u ，存在一有限观测时间 $t_f > t_0$ ，使得根据 $[t_0, t_f]$ 期间的输出 $\mathbf{y}(t)$ 能唯一地确定系统在初始时刻的状态 $\mathbf{x}(t_0)$ ，则称状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 是能观测的。若系统的每一个状态都是能观测的，则称系统是状态完全能观测的，或简称是能观测的。

(1) 能观测性判据一

定理 5.2 式 (5.2.1) 所示系统完全能观测的充要条件是能观测判别阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

的秩为 n 。

例 5.2.1 判别系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

的能观测性。

解

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

因为

$$\text{rank}(\mathbf{M}_o) = 2 = n$$

所以系统能观测。

(2) 能观测性判据二

1) 若系统矩阵 \mathbf{A} 为每个特征值都只有一个约当块的约当矩阵, 则系统能观测的充分必要条件为对应 \mathbf{A} 的每个约当块的 \mathbf{C} 的分块的第一列都不全为零;

2) 若 \mathbf{A} 为某个特征值有多于一个约当块的约当矩阵, 则系统能观测的充分必要条件为对应于 \mathbf{A} 的每个特征值的所有约当块的 \mathbf{C} 的分块的第一列线性无关。

例 5.2.2 判据下列系统的能观测性。

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{y} = [1 \quad 3] \mathbf{x} \\ 2) \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ 3) \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

解 显然 1) 和 3) 是状态完全能观测的, 2) 是状态不能观测的。

与能控性情况相似, 当矩阵 \mathbf{A} 为对角形但含有相同元素时以及当矩阵 \mathbf{A} 的约当标准型中有两个约当块的特征值相同时, 则上述能观测性判据二不适用。

5.3 能控性和能观测性与传递函数零极点的关系

(1) 单输入单输出系统

对单输入单输出系统, $\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 无零极点对消是系统完全能控又完全能观测的充分必要条件。考虑如下系统:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [0 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状态-输出间的传递函数

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{X}(s)} &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = [0 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s & 3 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2} [1 \quad s \quad -(2s+1)] \end{aligned}$$

系统的传递函数为

$$W(s) = [0 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ -1 & s & 3 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(s+1)^2}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1}$$

因为

$$\text{rank} M_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = 2$$

所以系统不完全能观测。上述系统的 $C(sI-A)^{-1}B$ 存在零极点对消, 所以不能完全观测, 即验证了上文的充要条件, 由此得出如下结论:

① 一个系统的传递函数所表示的是该系统既能控又能观测的那一部分子系统。

② 一个系统的传递函数若有零极点对消现象, 则视状态变量的选择不同, 系统或是不能控的或是不能观测的。

(2) 多输入多输出系统

设多输入多输出系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

式中, A 、 B 、 C 分别是 $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$ 矩阵, 它的传递函数矩阵为

$$W(s) = \frac{\text{Cadj}(sI-A)B}{\Delta(s)} \quad (5.3.2)$$

其中 $\Delta(s) = \det(sI-A)$, 即矩阵 A 的特征多项式, $W(s)$ 是 $m \times p$ 矩阵, 对于此系统有如下定理:

定理 5.3 对于式(5.3.1)描述的系统, 如果传递矩阵 $W(s)$ (式 5.3.2) 中, $\Delta(s)$ 与 $\text{Cadj}(sI-A)B$ 间没有非常数的公因式, 则该系统是能控且能观测的。

注: 此定理是多输入多输出系统能控能观测的充分条件而不是必要条件(充分性证明略)。

例 5.3.1 判断下列系统的能观测性, 并求状态-输出间的传递函数和系统的传递函数。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

解 因为

$$\text{rank} M_o = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

所以系统是状态完全能观测的。其状态-输出间的传递函数为

$$C(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

其系统的传递函数为

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s-1)^2(s-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix}$$

从本例可以看出，在求状态-输出间的传递函数和系统的传递函数时发生因子对消，但系统是完全能观测的。因此，对于多输入系统来说，定理 5.3 不是系统完全能观测的充分必要条件。

5.4 对偶原理

设系统 Σ_1 的动态方程为

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

系统 Σ_2 的动态方程为

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

$$y_2 = C_2 x_2$$

若 Σ_1, Σ_2 满足

$$A_2 = A_1^T, \quad B_2 = C_1^T, \quad C_2 = B_1^T$$

则称 Σ_1 和 Σ_2 互为对偶系统。

如果 Σ_1 和 Σ_2 互为对偶系统，那么显然，若系统 $\Sigma(A, B, C)$ 是一个 r 维输入， m 维输出的 n 阶系统，则其对偶系统 $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 是一个 m 维输入， r 维输出的 n 阶系统。对偶系统 Σ 和 $\tilde{\Sigma}$ 的方块结构图如图 5.4 所示。从图中可以看出互为对偶的两系统意味着输入端与输出端互换；信号传递方向相反；信号引出点和相加点的互换，对应矩阵的转置，以及时间的倒转。

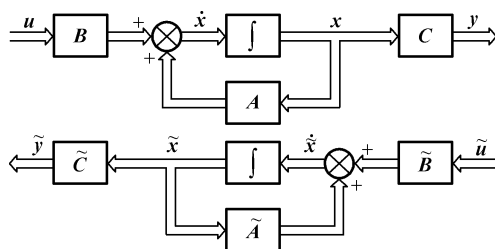


图 5.4 互为对偶系统的结构图

(1) 对偶系统的传递函数阵互为转置。

$$\begin{aligned} W_2(s) &= C_2(sI - A)^{-1}B_2 = B_1^T(sI - A_1^T)^{-1}C_1^T \\ &= B_1^T[(sI - A_1)^{-1}]^T C_1^T = [C_1(sI - A)^{-1}B_1]^T = [W_1(s)]^T \end{aligned}$$

所以若 Σ_1 , Σ_2 为单输入单输出 (SISO) 系统, 那么有

$$W_1(s) = W_2(s)$$

(2) 对偶系统特征方程式相同。

$$|\lambda I - A_1| = |\lambda I - A_1^T| = (|\lambda I - A_1|)^T = 0$$

即 $|\lambda I - A_2| = 0$ 和 $|\lambda I - A_1| = 0$ 是等价的。

定理 5.4 设线性定常连续系统 $\Sigma(A, B, C)$ 和 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 互为对偶, 则系统 Σ 的状态能控性等价于系统 $\tilde{\Sigma}$ 的状态能观测性, 其状态能观测性等价于系统 $\tilde{\Sigma}$ 的状态能控性。

证明 系统 Σ_1 的能控性判别矩阵

$$M_c = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$$

和系统 Σ_2 的能观测性矩阵为

$$M_o = [(B^T)^T \ (A^T)^T(B^T)^T \ \cdots \ (A^T)^T]^{n-1}(B^T)^T] = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$$

是完全相同的。同理 Σ_1 的能观测性矩阵

$$M_o = [C^T \ A^T C^T \ \cdots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

和系统 Σ_2 的能控性矩阵

$$M_c = [C^T \ A^T C^T \ \cdots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

也是完全相同的。

对偶原理是现代控制理论中一个十分重要的概念, 利用对偶原理可以把对系统的能控性分析方面所得的结论用于其对偶系统, 从而容易找出系统能观测性方面的结论。

5.5 能控标准型和能观测标准型

由于状态变量选择的非唯一性, 系统的状态空间表达式也不是唯一的。能控标准型对于系统的状态反馈分析比较方便; 能观标准型对于系统的状态观测器的设计以及系统辨识比较方便。当状态完全可控时才存在能控标准型, 当状态完全能观测时才存在能观测标准型。在将状态空间表达式化为能控、能观测标准型时必须首先判断系统的能控、能观测性。

下面讨论单输入系统的能控标准型。

(1) 能控标准 I 型

只有当状态完全能控时才存在能控标准型。

设线性定常输入系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

是可控的, 则存在线性非奇异变换

$$X = P_{cl} \tilde{X}$$

其中 P_{cl} 如下所示 (设经过非奇异变换后的系统为 $\Sigma[\tilde{A} \ \tilde{B} \ \tilde{C}]$):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_{\text{cl}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{\text{cl}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -a_0 & -a_1 \cdots -a_{n-1} \end{array} \right] \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}_{\text{cl}}^{-1} \mathbf{B} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T \\
\tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{P}_{\text{cl}} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}] \\
\mathbf{P}_{\text{cl}} &= [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1} & 1 & & \mathbf{0} & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

称上式的状态空间表达式为能控标准 I 型。其中 a_i ($i=0,1,\cdots,n-1$) 为特征多项式 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 的各项系数。

采用能控标准 I 型的 $\Sigma[\tilde{\mathbf{A}} \ \tilde{\mathbf{B}} \ \tilde{\mathbf{C}}]$ 求系统的传递函数非常方便。

$$W(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

从上式可以看出，传递函数分母多项式的各项系数是 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的最后一行的元素的负值；分子多项式的各项系数是 $\tilde{\mathbf{C}}$ 阵的元素。同样，根据传递函数的分母多项式和分子多项式的系数，可以直接写出系统的能控标准 I 型。

(2) 能控标准 II 型

设线性定常单输入系统

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

是可控的，则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\text{c2}} \tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tilde{\mathbf{x}}$$

其中 \mathbf{P}_{c2} 如下所示（设经非奇异变换后的系统为 $\Sigma[\tilde{\mathbf{A}} \ \tilde{\mathbf{B}} \ \tilde{\mathbf{C}}]$ ）：

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_{\text{c2}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{\text{c2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -a_0 \\ \hline I_{n-1} & -a_1 \cdots -a_{n-1} \end{array} \right] \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}_{\text{c2}}^{-1} \mathbf{B} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\
\tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{P}_{\text{c2}} = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}] \\
\mathbf{P}_{\text{c2}} &= [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]
\end{aligned}$$

称形如上式的状态空间表达式为能控标准 II 型。

推论：具有能控标准型的系统一定能控。

例 5.5.1 已知能控的线性定常系统，要求变换成能控标准型。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

解

1) 能控性矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} \mathbf{M}_c = 3$$

2) \mathbf{A} 的特征多项式 $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$ 。

注意: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$ 。

3) 计算变换矩阵 \mathbf{P}

$$[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3] = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4) 计算 $\tilde{\mathbf{C}}$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0 \quad 1]$$

5) 能控标准型

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = [-2 \quad 0 \quad 1] \tilde{\mathbf{x}}$$

单输出系统的能观测标准型与变换为能控标准型的条件类似，只有当系统状态完全能观测时，系统的状态空间表达式才可能化为能观测标准型。

(3) 能观测标准 I 型

设线性定常单输入系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

是能控的，则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{o1} \tilde{\mathbf{x}}$$

其中， \mathbf{P}_{o1} 为 \mathbf{M}_o 的逆矩阵。

设经非奇异变换后的系统为 $\Sigma[\tilde{\mathbf{A}} \quad \tilde{\mathbf{B}} \quad \tilde{\mathbf{C}}]$ ，则

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_{01}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ \hline -a_0 & -a_1 \cdots -a_{n-1} \end{array} \right] \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}_{01}^{-1} \mathbf{B} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]^T \\
\tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{P}_{01} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \\
\mathbf{P}_{01}^{-1} &= \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

称上式的状态空间表达式为能观测标准 I 型。其中 a_i ($i=0,1,\cdots,n-1$) 为特征项式 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 的各项系数。

(4) 能观测标准 II 型

设线性定常单输入系统 $\Sigma[\tilde{\mathbf{A}} \quad \tilde{\mathbf{B}} \quad \tilde{\mathbf{C}}]$ 是可控的, 则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{02} \tilde{\mathbf{x}}$$

其中 \mathbf{P}_{02} 如下所示 (设经非奇异变换后的系统为 $\Sigma[\tilde{\mathbf{A}} \quad \tilde{\mathbf{B}} \quad \tilde{\mathbf{C}}]$):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_{02}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -a_0 \\ \hline \mathbf{I}_{n-1} & -a_1 \cdots -a_{n-1} \end{array} \right] \\
\tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}_{02}^{-1} \mathbf{B} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]^T \\
\tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{P}_{02} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \\
\mathbf{P}_{02} &= \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

称上式的状态空间表达式为能观测标准 II 型。

其中 a_i ($i=0,1,\cdots,n-1$) 为特征项式:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

的各项系数。

由上可知, 能观测标准 I 型和能控标准 II 型互为对偶; 能观测标准 II 型和能控标准 I 型互为对偶。

例 5.5.2 试将如下系统转化为能观测标准 I 型和 II 型。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}$$

解 能观测判别阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

满秩, 所以系统能观测。

系统特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 9\lambda + 2 = 0$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -9, \quad a_2 = 0$$

根据能观测标准 I 型的描述, 通过 $\mathbf{P}_{o1} = \mathbf{M}_o^{-1}$ 的线性变换, 就可以得到系统能观测标准 I 型 $\Sigma_{o1}(\mathbf{A}_{o1}, \mathbf{B}_{o1}, \mathbf{C}_{o1})$ 。其中,

$$\mathbf{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{o1} = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{B}_{o1} = \mathbf{P}_{o1}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

根据能观测标准 II 型的描述, 通过

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{o2} &= \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

的线性变换, 就可以得到能观测标准 II 型 $\Sigma_{o2}(\mathbf{A}_{o2}, \mathbf{B}_{o2}, \mathbf{C}_{o2})$, 其中

$$\mathbf{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{o2} = [0 \ 0 \ 1]$$

$$\mathbf{B}_{o2} = \mathbf{P}_{o2}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下面给出一组结论:

① 同一系统的能控标准 II 型 Σ_{o2} 与能观测标准 I 型 Σ_{o1} 是互为对偶系统。

② 同一系统的能控标准 I 型与能观测标准 II 型是互为对偶系统。

所以同能控标准 I 型一样, 我们可以直接从能观测标准 II 型中写出系统的传递函数, 或者直接从系统的传递函数写出系统能观测标准 II 型。

5.6 系统的结构分解

由上节介绍可知，若系统是完全能控（完全能观测）的，经过非奇异变换总可以得到相应的标准型。对于不完全能控（不完全能观测）的系统，若能区分能控的部分和不能控的部分，能观测的部分和不能观测的部分，对系统进行分析、设计时将带来许多方便。由于对线性系统作线性非奇异变换，不改变系统的能控性和能观测性，本节系统的结构分解就是利用线性非奇异变换来解决这一问题的。

基于能控性与能观测性的讨论，一般系统可由四个子系统组成，四个子系统的状态变量把状态空间分割成四个子空间，如图 5.5 所示。结构分解，就是要将组成系统的各个子系统求解出来。

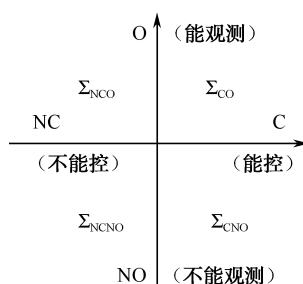


图 5.5 结构分解示意图

(1) 系统按能控性分解

定理 5.5 设线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (5.6.1)$$

是状态不完全能控的，其能控性判别矩阵的秩为

$$\text{rank} \mathbf{M}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n_1 < n$$

则存在非奇异变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{x}}$ ，将状态空间表达式 (5.6.1) 变换为

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.6.2)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{P}_c = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2]\end{aligned}$$

可以看出，系统状态空间表达式变化为式 (5.6.2) 的形式后，系统就被分解为能控和不能控两部分。其中， n_1 维子系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \hat{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} + \hat{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{x}}_2$$

是能控的，而 $(n-n_1)$ 维子系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \hat{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{x}}_2$$

是不能控的，因为控制作用 \mathbf{u} 对 $\hat{\mathbf{x}}_2$ 是不起作用的，故 $\hat{\mathbf{x}}_2$ 仅作无控的自由运动。按上述结构分解后的系统结构示意图如图 5.6 所示。

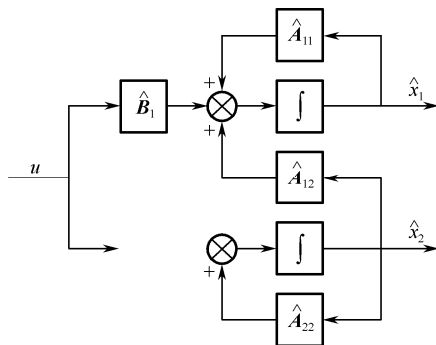


图 5.6 分解后的系统结构示意图

非奇异变换阵

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{P}_{c1} \quad \mathbf{P}_{c2} \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{cn_1} \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{cn}]$$

中的 n 个列向量按如下方法构成，前 n_1 个列向量 \mathbf{P}_{c1} , \mathbf{P}_{c2} , \mathbf{P}_{c3} , ..., \mathbf{P}_{cn_1} 是能控性矩阵 \mathbf{M}_c 中 n_1 个线性无关的列，另外的 $(n-n_1)$ 个列向量 \mathbf{P}_{cn_1+1} , \mathbf{P}_{cn_1+2} , ..., \mathbf{P}_{cn} 在确保 \mathbf{P}_c 为非奇异的条件下完全是任意的。

例 5.6.1 系统方程如下，要求按能控性进行结构分解。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

解

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$$

系统不能控

由于 \mathbf{M}_c 的秩为 1。说明 \mathbf{M}_c 中线性独立的列向量只有一列。选择

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

再补充一个列向量，且与其线性无关：

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_c \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}_c$$

经过线性变换后

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

(2) 系统按能观测性分解

定理 5.6 设线性时不变系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

是状态不完全能观测的，其能观测性判别矩阵的秩为

$$\text{rank} M_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 < n$$

则存在非奇异变换 $x = P_o \tilde{x}$ ，将状态空间表达式 (5.6.3) 变换为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u \\ y &= \tilde{C} \tilde{x} \end{aligned}$$

可见，经上述变换后，系统分解为能观测的 n_1 维子系统

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{A}_{11} \tilde{x}_1 + \tilde{B}_1 u \\ y &= \tilde{C}_1 \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

和不能观测的 $n-n_1$ 维子系统

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{21} \tilde{x}_1 + \tilde{A}_{22} \tilde{x}_2 + \tilde{B}_2 u$$

图 5.7 是其结构示意图。

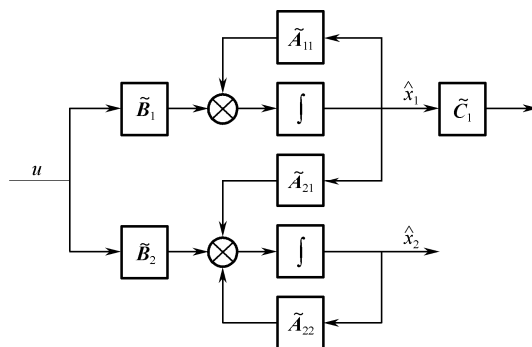


图 5.7 分解后的系统结构示意图

非奇异变换阵 P_o 是这样构造的，可以取

$$P_o^{-1} = \begin{bmatrix} P_{o1} \\ P_{o2} \\ \vdots \\ P_{on_1} \\ \vdots \\ P_{on} \end{bmatrix}$$

中的前 n_1 个行向量 $P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0n}$ 为能观测判别矩阵 M_0 中 n_1 个线性无关的行, 另外的 $n-n_1$ 个行向量 $P_{0n_1+1}, P_{0n_1+2}, \dots, P_{0n}$ 在确保 P_0^{-1} 是非奇异的条件下完全是任意的。

例 5.6.2 系统方程如下, 要求按能观测性进行结构分解。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

解

$$\text{rank} M_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

从 Q_0 中任选两个行向量, 例如 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 再补充一个与之线性无关的行向量。

$$P_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = P_0^{-1} \mathbf{A} P_0^{-1} \quad \bar{\mathbf{B}} = P_0^{-1} \mathbf{B} \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} P_0$$

线性变换后

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}$$

如果线性系统 $\Sigma=(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 是不完全能控和不完全能观测, 若对该系统同时按能控性和能观测性进行分解, 则可以把系统分解成四个部分: 能控且能观测、能控不能观测、不能控能观测、不能控亦不能观测。当然, 上述结构是一种典型形式, 并非所有系统都可分解为这四个部分。

(3) 同时按能控性和能观测性进行结构分解

定理 5.7 若系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

不能控, 不能观测, 且存在线性变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$, 使其变换成下面形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\text{co}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\text{co}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\text{co}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\text{co}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{\text{co}} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{\text{co}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{\text{co}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\text{co}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{B}}_{\text{co}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_{\text{co}} \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_{\text{co}} \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{co}} \end{bmatrix}$$

系统传递函数矩阵

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}_{c0}(sI - \bar{A}_{c0})^{-1}\bar{B}_{c0}$$

其系统结构示意图如图 5.8 所示。

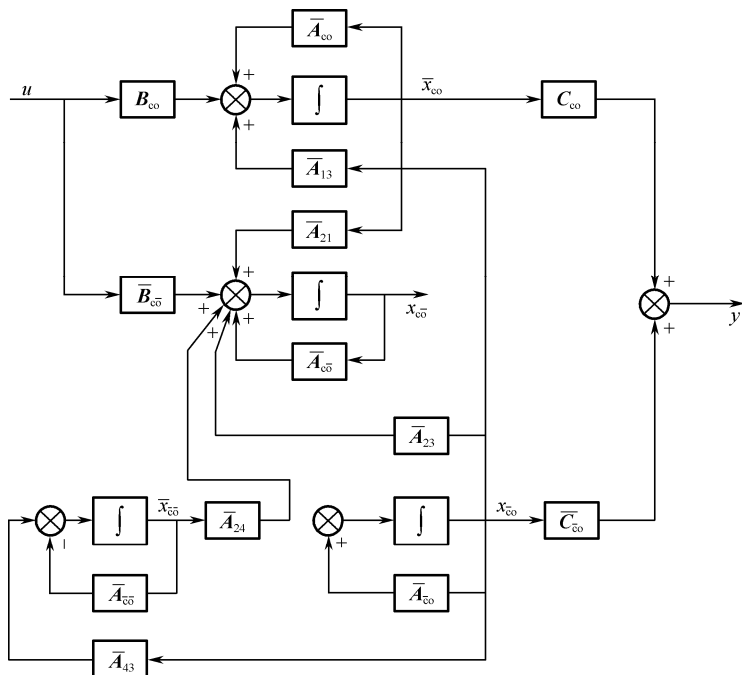


图 5.8 系统结构示意图

一旦变换矩阵 P 确定后，只需经过一次变换即可对系统同时按能控、能观测进行结构分解。但变换矩阵 P 的构造涉及较多的线性空间概念，所以本书没有给出 P 的确定方法。

5.7 传递函数阵的实现问题

对于线性定常系统，给定 4 个系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 后，可由状态空间表达式求出系统的传递函数矩阵，系统的实现问题正好反过来，即给定传递函数矩阵，来求出系统的状态空间表达式。这种由传递函数矩阵或相应的脉冲响应来建立系统的状态空间表达式的工作，称为实现问题。换言之，若状态空间描述 A 、 B 、 C 、 D 是传递函数矩阵 $W(s)$ 的实现，则必有

$$C(sI - A)^{-1}B + D = W(s) \quad (5.7.1)$$

实现的主要目的有三：第一，状态方程很容易用计算机进行仿真，若能找到一实现，就可利用计算机仿真技术来模拟给定的传递函数矩阵；第二，可以利用运算放大器以及复合无源网络来“实现”传递函数矩阵；第三，通过传递函数矩阵及状态空间表达式来了解系统内部及外部特性。

5.7.1 单输入单输出系统的实现问题

如果给定一个传递函数 $W(s)$ ，求得一个系统方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

或者

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\quad (5.7.3)$$

注：当传递函数分子的阶次小于分母的阶次时，有式（5.7.2）的形式；当传递函数分子的阶次等于分母的阶次时，有式（5.7.3）的形式。

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

系统传递函数为

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} + b_0$$

式中， b_0 表示输入与输出之间的直接耦合系数，而等式右面第一项表示严格真分式函数项。当 $W(s)$ 具有真分式有理函数时，其实现为 $\Sigma=(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 形式，且有 $\mathbf{D}=b_0$ ，当 $W(s)$ 具有严格真分式有理函数时，其实现为 $\Sigma=(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 形式。在此， $s \rightarrow \infty$ 我们只讨论严格真分式传递函数，即系统传递函数为

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

1. 能控标准型实现

(1) $W(s)$ 不含零点

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

可变换为

$$s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \cdots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = \beta_0 u(s)$$

进行拉普拉斯反变换

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = \beta_0 u$$

选择系统的状态变量

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{y}{\beta_0} \\ x_2 &= \frac{\dot{y}}{\beta_0} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{y^{(n-1)}}{\beta_0}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = x_3, \cdots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n) + u \\ y &= \beta_0 x_1\end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\beta_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

不含零点能控标准型实现的系统结构图如图 5.9 所示。

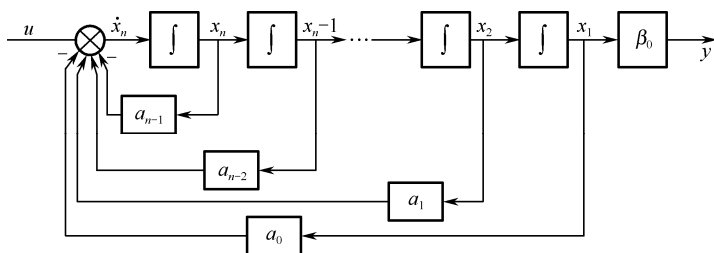


图 5.9 $W(s)$ 不含零点能控标准型实现的系统结构图

(2) $W(s)$ 含零点

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$W(s) = \beta_0 \frac{1}{D(s)} + \beta_1s \frac{1}{D(s)} + \cdots + \beta_{n-1}s^{n-1} \frac{1}{D(s)}$$

$$y(s) = \beta_0x_1(s) + \beta_1sx_1(s) + \cdots + \beta_{n-1}s^{n-1}x_1(s)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \cdots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = -(a_0x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-1}x_n) + u$$

$$y = \beta_0x_1 + \beta_1x_2 + \cdots + \beta_{n-1}x_n$$

写成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

含零点能控标准型实现的系统结构图如图 5.10 所示。

2. 能观测标准型实现

系统传递函数为

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$s^n y(s) + a_{n-1}s^{n-1}y(s) + \cdots + a_1sy(s) + a_0y(s) = \beta_{n-1}s^{n-1}u(s) + \cdots + \beta_1su(s) + \beta_0u(s)$$

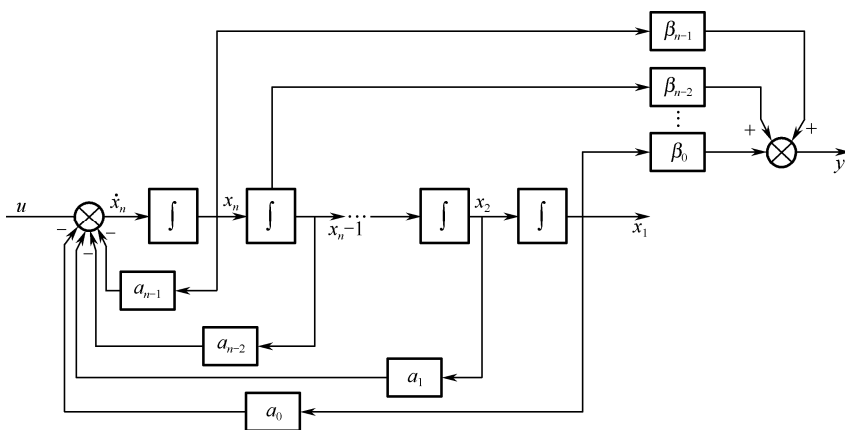


图 5.10 $W(s)$ 含零点能控标准型实现的系统结构图

如果令

$$\begin{aligned}
 x_n &= y \\
 x_{n-1} &= \dot{y} + a_{n-1}y - \beta_{n-1}u \\
 x_{n-2} &= \ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} - \beta_{n-1}\dot{u} + a_{n-2}y - \beta_{n-2}u \\
 &\vdots \\
 x_1 &= y^{(n-1)} + a_{n-1}y^{(n-2)} - \beta_{n-1}u^{(n-2)} + \cdots + a_1y - \beta_1u
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_0x_n + \beta_0u \\
 \dot{x}_2 &= x_1 - a_1x_n + \beta_1u \\
 \dot{x}_3 &= x_2 - a_2x_n + \beta_2u \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_{n-2} - a_{n-2}x_n + \beta_{n-2}u \\
 \dot{x}_n &= x_{n-1} - a_{n-1}x_n + \beta_{n-1}u
 \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
 y &= \mathbf{C}\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & -a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

能观测标准型实现的系统结构图如图 5.11 所示。

例 5.7.1 试求传递函数

$$W(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

的能控标准型实现和能观测标准型实现。

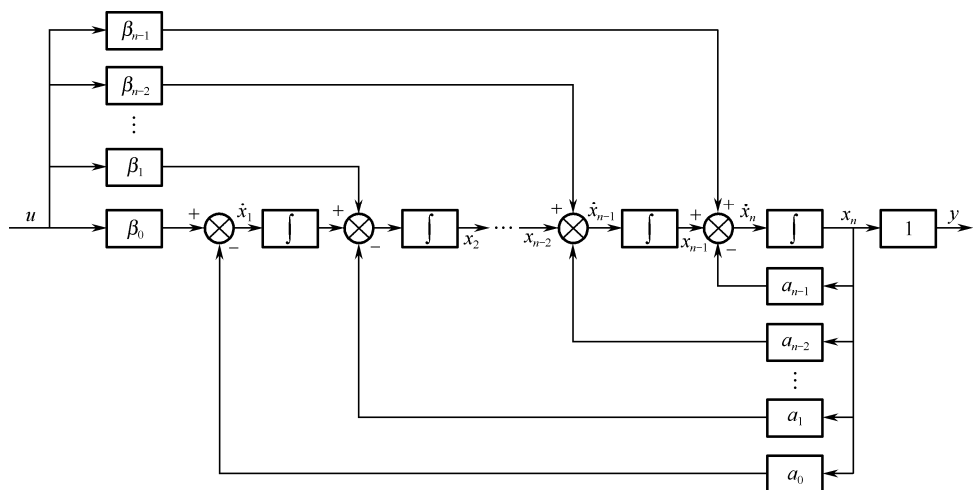


图 5.11 能观测标准型实现的系统结构图

解 因为

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 & a_2 &= 11 & a_3 &= 6 \\ b_1 &= 1 & b_2 &= 4 & b_3 &= 5 \end{aligned}$$

(1) 能控标准型为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [5 \quad 4 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

(2) 能观测标准型为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

5.7.2 多输入多输出系统的实现问题

对具有 r 个输入和 m 个输出的多输入多输出系统，可把 $m \times r$ 的传递函数阵 $\mathbf{W}(s)$ 写成和单输入单输出系统传递函数相类似的形式，即

$$\mathbf{W}(s) = \frac{\mathbf{B}_1 s^{n-1} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1} s + \mathbf{B}_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} \quad (5.7.4)$$

式中， $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_n$ 均为 $m \times r$ 实常数矩阵，分母多项式为该传递函数阵的特征多项式（最小公分母）。

对于式 (5.7.4) 形式的传递函数阵的能控标准型实现的各系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \cdots & \mathbf{0}_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \cdots & \mathbf{I}_r \\ -a_n \mathbf{I}_r & -a_{n-1} \mathbf{I}_r & \cdots & -a_1 \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_r \\ \vdots \\ \mathbf{0}_r \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

$$C = [B_n \quad B_{n-1} \quad \cdots \quad B_1]$$

其中, $\mathbf{0}_r$ 和 \mathbf{I}_r 分别表示零矩阵和单位矩阵。

能观测标准型实现的各系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -a_n \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -a_{n-1} \mathbf{I}_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{I}_m & -a_1 \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_n \\ B_{n-1} \\ \vdots \\ B_1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\mathbf{0}_m \quad \mathbf{0}_m \quad \cdots \quad \mathbf{I}_m]$$

其中, $\mathbf{0}_m$ 和 \mathbf{I}_m 分别表示 $m \times m$ 零矩阵和单位矩阵。

显然, 能控标准型实现的维数是 $n \times r$, 能观测标准型实现的维数是 $n \times m$, 为了保证实现的维数较小, 当 $m > r$, 即输出的维数大于输入的维数时, 应采用能控标准型实现; 当 $m < r$ 时应采用能观测标准型实现。

例 5.7.2 试求 $W(s)$ 的能控和能观测标准型实现。

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

解 本例 $l=m=2$ 。

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} D + W'(s)$$

$$W'(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & (s+1)(s+2) \\ -(s+2)(s+3) & -(s+1)(s+3) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

故能控标准型实现为

$$A_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -6\mathbf{I}_2 & -11\mathbf{I}_2 & -6\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -5 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

能观测标准型实现为

$$A_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & -6\mathbf{I} \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 & -11\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 & -6\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \\ 5 & 3 \\ -5 & -4 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_o = [0_2 \quad 0_2 \quad I_2], \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 \\ -a_3 I_2 & -a_2 I_2 & -a_1 I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -11 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -11 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

从上述分析已知，同一个传递函数（或矩阵）可以有许许多多的实现，它们的维数也可以是各不相同的。在很多可能实现中，有一种维数最小的实现，称之为传递函数矩阵 $G(s)$ 的最小实现或不可约实现。它是最重要的实现，可以用最少数目的元件（如积分器）来模拟系统。

定理 5.8 传递函数阵 $W(s)$ 的一个实现 $\Sigma(A, B, C)$ 为最小实现的充要条件是： $\Sigma(A, B, C)$ 不但能控而且能观测。

根据上述判断最小实现的准则，构造最小实现的途径为：

(1) 求传递函数矩阵的任何一种能控形或能观测性实现，再检查实现的能观测性或能控性，若已是能控能观，则必是最小实现。

(2) 否则的话，采用结构分解定理，对系统进行能观测性或能控性的分解，找出既能控又能观测的子空间，从而得到最小实现。

例 5.7.3 试求传递函数阵

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

的最小实现。

解

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} [s+3 \quad s+1] \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \{[1 \quad 1]s + [3 \quad 1]\} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} m &= 1 & r &= 2 \\ a_1 &= 6 & a_2 &= 11 & a_3 &= 6 \\ B_1 &= [0 \quad 0] & B_2 &= [1 \quad 1] & B_3 &= [3 \quad 1] \end{aligned}$$

因 $m < r$ ，故采用能观测标准型实现。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

又因为

$$\text{rank} Q_c = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \end{bmatrix} = 3 = n$$

所以系统是既能控又能观测的，它为最小实现。

如果现采用能控标准型实现，此实现是否为最小实现，须判断系统是否完全能观测，若完全能观测，则为一个最小实现；若状态不完全能观测，则需要结构分解，找出其状态完全能观测部分。显然，能控标准型实现不是最小实现。

5.8 离散系统的能控性与能观测性

(1) 线性定常离散系统的能控性

定义 对于线性定常离散系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

如果存在控制信号序列 $u(k), u(k+1), \dots, u(n-1)$ ，使得系统从第 k 步状态 $\mathbf{x}(k)$ 开始，能在第 n 步上达到零状态（平衡状态），即 $\mathbf{x}(n)=0$ ，其中 n 为大于 k 的某一个有限正整数，称系统在第 k 步上是能控的， $\mathbf{x}(k)$ 称为系统在第 k 步上的能控状态。

如果对于任一个 k ，第 k 步上的状态 $\mathbf{x}(k)$ 都是能控状态，称系统完全能控。

注意：控制信号序列有限，但规律和大小没有限制。

(2) 判别标准

定理 5.9 线性定常离散系统 $\Sigma(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ 状态能控的充要条件是能控性矩阵

$$\mathbf{M} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{GH} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}]$$

是满秩的（秩为 n ）

证明 离散系统解

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{G}^{k-j-1} \mathbf{H}u(j)$$

假设能控，经 n 步

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(n) = 0$$

$$0 = \mathbf{G}^n \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1} \mathbf{H}u(j)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{G}^{n-j-1} \mathbf{H}u(j) = -\mathbf{G}^n \mathbf{x}(0)$$

写成

$$[\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \quad \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{GH} \quad \mathbf{H}] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix} = -\mathbf{G}^n \mathbf{x}(0)$$

其中， $[u(0), \dots, u_{n-1}]^T$ 为 n 个未知，方程有解的充要条件是系数阵满秩，即

$$\text{rank} \mathbf{M} = \text{rank} [\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \quad \mathbf{G}^{n-2}\mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{GH} \quad \mathbf{H}] = n$$

$$\text{或 } \text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{GH} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] = n$$

说明：形式上同连续系统 $AB \rightarrow GH$ 。

例 5.8.1 已知

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

判断是否能控。

解

$$[H \quad GH \quad G^2H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

秩=3=n。故系统能控。

说明：也可把矩阵 G 化为对角形或约当标准型后，按定理 5.1 判别系统是否能控。

(3) 线性定常离散系统的能观测性

定义：当 $\mathbf{u}(k)$ 给定，根据第 i 步，以及以后若干步对 $\mathbf{y}(i)$, $\mathbf{y}(i+1)$, \dots , $\mathbf{y}(n)$ 的测量，就唯一地确定出第 i 步的 $\mathbf{x}(i)$ ，称 $\mathbf{x}(i)$ 是能观测的。离散系统结构图如图 5.12 所示。

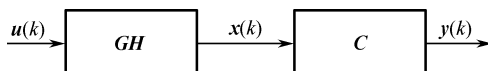


图 5.12 离散系统结构图

判别准则

定理 5.10 线性定常离散系统状态能观测的充要条件是

$$\text{rank} N = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

证明 假设观测从第 0 步开始，令 $\mathbf{u}(k)=0$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

由解

$$\mathbf{x}(k) = G^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} G^{k-i-1} H \mathbf{u}(i)$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) = CG^k \mathbf{x}(0)$$

递推求解

$$k=0, \quad \mathbf{y}(0) = C\mathbf{x}(0)$$

$$k=1, \quad \mathbf{y}(1) = CG\mathbf{x}(0)$$

\vdots

$$k=n-1, \quad \mathbf{y}(n-1) = CG^{n-1}\mathbf{x}(0)$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

即 $\mathbf{x}(0)$ 有解的充要条件是系数矩阵满秩。

从测量的 $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n-1)$ 要唯一地确定出 $\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$ 的充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

例 5.8.2 线性定常离散系统方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}(k)$$

试判断系统的能观测性。

解

$$\text{rank} \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \mathbf{CG}^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} = 3$$

因此，系统能观测。

5.9 利用 MATLAB 分析系统的能控性和能观测性

MATLAB 控制系统工具箱为能控性、能观测性分析提供了专用函数。在 MATLAB 中，可利用 `ctrb` 和 `obsv` 函数直接求出能控性和能观测性矩阵，从而确定系统状态能控性和能观测性。

(1) `ctrb` 函数

功能：根据动态系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 生成能控性判别矩阵 $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 。

调用格式： $\mathbf{Q}_c = \text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

(2) `obsv` 函数

功能：根据动态系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 生成能观测性判别矩阵 $\mathbf{c} = [3 \ 0 \ 1 \ 0]$ 。

调用格式： $\mathbf{Q}_o = \text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$

(3) `gram` 函数

功能：根据动态系统 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 生成判别能控性、能观测性的格拉姆矩阵。

$$\mathbf{W} = \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} dt$$

$$\mathbf{M} = \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} dt$$

调用格式: $W=\text{gram}(A, B)$ %生成判别能控性的格拉姆矩阵。
 $M=\text{gram}(A', C')$ %生成判别能观测性的格拉姆矩阵,
 其中, A', C' 分别为 A, C 的转置。

(4) dgram 函数

功能: 生成判别离散系统能控性或能观测性的格拉姆矩阵。

调用格式: 参见 gram 函数

(5) ctrbf 函数

功能: 将不能控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 按能控性进行分解。

调用格式: $[Abar, Bbar, Cbar, T, K]=\text{ctrbf}(A, B, C)$

其中, $Abar=TA T^{-1}=\begin{bmatrix} A_{\bar{c}} & 0 \\ A_{21} & A_c \end{bmatrix}$, $Bbar=TB=\begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}$, $Cbar=CT^{-1}=[C_{\bar{c}} \ C_c]$, T 为变换阵,

K 为包含状态能控个数信息的行向量, 执行 $\text{sum}(K)$ 语句即可得到能控状态函数。

$\Sigma(A_c, B_c, C_c)$ 为能控子系统, 其与 $\Sigma(A, B, C)$ 具有相同的传递函数矩阵。

1. 系统的能控性分析

对于 n 维线性定常连续系统, 状态向量完全能控的充分必要条件是满足 $\text{rank}U_c=\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]=n$ 。 $n \times r$ 维能控性矩阵 U_c 可以利用 MATLAB 求能控性矩阵的函数 ctrb 求。函数 ctrb 中, 输入参量 A 为连续系统的系统矩阵 A 或者离散系统的系统矩阵 G , 输入参量 B 为连续系统的控制矩阵 B 或者离散系统的控制矩阵 H , 函数返回的就是系统能控性矩阵 U_c , 可见函数 ctrb 既适用于连续系统, 也适用于离散系统。

例 5.9.1 已知系统状态方程为 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, 判别系统的能控

性。

解 求解本题的程序:

```
A=[-2, 2, -1; 0, -2, 0; 1, -4, 0];
B=[0, 0; 0, 1; 1, 0];
Qc=ctrb(A, B);
n=rank (Qc);
L=length (A);
If n==L
    str='系统是状态完全能控'
Else
    str='系统是状态不完全能控'
End
```

运行结果为

```
str=
系统是状态完全能控的。
```

1. 系统的能观测性分析

对 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$ 所示的 n 维线性定常连续系统，状态向量完全能观测性的充分必

要条件是满足式 $\text{rank} \mathbf{V}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$ 。 $m \times n$ 维能观测性矩阵 \mathbf{V}_o 可以用 MATLAB 的求能观测

性矩阵函数 `obsv` 来计算。函数 `obsv` 中，输入参量 \mathbf{A} 即为连续系统的系统矩阵 \mathbf{A} 或者离散系统的系统矩阵 \mathbf{G} ，输入参量 \mathbf{C} 即为连续系统的输出矩阵 \mathbf{C} 或者离散系统的输出矩阵 \mathbf{C} ，函数返回的就是系统能观测性矩阵 \mathbf{V}_o 。可见函数 `obsv` 既适用于连续系统，也适用于离散系统。

例 5.9.2 控制系统的状态空间表达式为： $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ ， $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ ，判

别系统的能观测性。

解 求解本题的程序：

```
A=[4, 1, 0, 0; 4, 0, 0, 0; 0, 0, 4, 1; 0, 0, 0, 4];
C=[1, 1, 2, 1; 1, 2, 2, 0];
Qo=obsv(A,C);
r=rank(Qo);
L=size(A);
If r==L
    str='系统是状态完全能观测'
Else
    str='系统是状态不完全能观测'
End
```

运行结果为

```
Str=
系统是状态不完全能观测
```

3. 将系统按能观测和不能观测进行分解

在 MATLAB 中也可利用按能观测性分解的有关步骤将系统按能观测和不能观测进行分解，下面介绍具体应用。

例 5.9.3 系统的空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= [0 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x} \end{aligned}$$

对系统进行能观测性分解。

解 根据系统按能观测性分解的有关步骤，可编写以下 MATLAB 程序：

```
A=[0 0 -1; 1 0 -3; 0 1 -3]; b=[1; 1; 0]; c=[0 1 -2];
Vo=obsv(A, c); ro=rank(Vo);
n=size(A);
If ro==n
    Disp('system is observable.')
Elseif ro<n
    T1=c; T2=c*A; T3=[0 0 1];
    T=[T1; T2; T3]; T0=inv(T)
    A1=T*A*T0
    B1=T*b
    C1=c*T0
End
```

执行结果显示：

```
A1=
    0     0     0
   -1    -2     0
    1     0    -1

B1=
    1
   -1
    0

C1=
    1     0     0
```

根据以上结果，系统分解后的各矩阵可表示如下。

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = [1 \ 0 \ 0]$$

4. 将系统按能控性和不能控性进行分解

在 MATLAB 中也可利用按能控性分解的有关步骤将系统按能控和不能控进行分解。

思考题与习题

5.1 状态能控、能观测的含义是什么？

5.2 状态能控、能观测和系统能控、能观测这两个概念是否一样？

5.3 线性时变系统的能控、能观测性为什么要强调是初始时刻 t_0 上的能控、能观测性，而线性定常系统则不必强调这一点？

5.4 为什么说线性非奇异变换不改变系统的能控、能观测性？

5.5 为什么能观测的定义中要求一观测时间？

5.6 若 x_1 是能观测状态， x_2 是另一能观测状态，那么 x_1+x_2 一定是能观测状态吗？为什么？

5.7 判别下列线性定常系统的能控性。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$(4) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

5.8 判别下列线性定常系统的能观测性。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = [1 \quad 4 \quad 2] \mathbf{x} \quad (2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

5.9 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad -1] \mathbf{x}$$

试判别系统的状态能控性及输出能控性。

5.10 已知线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad -1 \quad 1] \mathbf{x}$$

试按能控性或能观测性对其进行结构分解。

5.11 线性定常连续系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(1) 设采样周期为 T ，求离散化系统的状态空间表达式。

(2) 试确定使离散化系统能控、能观测的 T 值。

5.12 设有两个能控且能观测系统 Σ_1 和 Σ_2 。

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 = [5 \quad 1] \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \dot{\mathbf{x}}_2 = -5\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2$$

(1) 求 Σ_1 后面串联 Σ_2 后串联系统的状态空间表达式；判断串联系统是否能控、能观测？求串联系统的传递函数。

(2) 若 Σ_1 和 Σ_2 并联，求并联系统的状态空间表达式，判断并联系统是否能控、能观测？求并联系统的传递函数。

5.13 试将下列系统按能控性和能观测性进行结构分解。

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 2 \quad 2]$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 2 \quad 2]$$

第6章 控制系统的稳定性与李亚普诺夫方法

稳定性是系统的重要特性，是系统正常工作的前提条件，因此在控制系统的分析和设计中，首先要解决的就是系统的稳定性问题。经典控制理论中已建立的代数判据、奈奎斯特判据、对数判据、根轨迹判据可用来判断线性定常系统的稳定性，但不适用于非线性、时变系统；相平面法则只适用于一阶、二阶非线性系统。1892年俄国学者李亚普诺夫提出的稳定性理论乃是确定系统稳定性的更一般理论，能够采用状态向量的描述，它不仅适用于单变量、线性、定常系统，还适用于多变量、非线性、时变系统，具有一定的优越性。尽管在应用该理论时，需要一定的经验和技巧来构造李亚普诺夫函数，使该方法的应用受到限制，但在现代控制理论中，它仍作为一种重要方法，并在控制系统分析设计中不断得到应用和发展。

李亚普诺夫判断系统稳定性的问题归纳为两种方法，即李亚普诺夫第一法和第二法。李亚普诺夫第一法是通过求解系统的微分方程，然后根据解的性质来判断系统的稳定性。其基本思路与分析方法和经典理论是一致的。该方法又称为间接法。而李亚普诺夫第二法的特点是不必求解系统的微分方程（或状态方程），而是首先构造一个类似于能量函数的李亚普诺夫函数，然后再根据李亚普诺夫函数的性质直接判断系统的稳定性。因此，该方法又称为直接法。由于求解非线性或时变系统的微分方程或状态方程的解通常是很困难的，所以这种方法显示出很大的优越性。

本章将详细介绍李亚普诺夫关于稳定性的定义、李亚普诺夫关于稳定性的基本定理以及稳定性的判别方法，着重介绍李亚普诺夫第二法。

6.1 稳定性的概念

系统的稳定一般有外部稳定和内部稳定两种。外部稳定又称作输出稳定，也就是当系统在干扰取消后，在一定时间内，其输出会恢复到原来的稳态输出。输出稳定有时描述为系统的BIBO稳定，即有限的系统输入只能产生有限的系统输出。系统内部稳定主要针对系统内部状态，反映的是系统内部状态受干扰信号的影响。当扰动信号取消后，系统的内部状态会在一定时间内恢复到原来的平衡状态，则称系统状态稳定。

在经典控制论中，研究对象都是用高阶微分方程或传递函数描述的单输入单输出（SISO）系统，反映的仅是输入输出的关系，不会涉及系统内部的状态。因此经典控制论中只讨论系统的输出稳定问题。

当系统不是线性定常系统时，或者对于系统内部状态稳定问题，经典控制论中的方法就不能解决了，这就需要下面介绍的李亚普诺夫稳定性的理论。

6.1.1 外部稳定性

定义 6.1（有界输入-有界输出稳定性） 对于零初始条件的因果系统，如果存在一个固定的有限常数 k 及一个标量 a ，使得对于任意的 $t \in [t_0, \infty]$ ，当系统的输入 $u(t)$ 满足 $\|u(t)\| \leq k$ 时，所产生的输出 $y(t)$ 满足 $\|y(t)\| \leq ak$ ，则称该因果系统是外部稳定的，也就是有界输入-有界输出稳定的，简记为 BIBO 稳定。

这里必须指出, 在讨论外部稳定性时, 是以系统的初始条件为零作为基本假设的, 在这种假设下, 系统的输入输出描述是唯一的。线性系统的 BIBO 稳定性可由输入输出描述中的脉冲响应矩阵或传递函数矩阵进行判别。

定理 6.1[时变情况] 对于零初始条件的线性时变系统, 设 $\mathbf{W}(t, \tau)$ 为其脉冲响应矩阵, 则系统为 BIBO 稳定的充分必要条件为, 存在一个有限常数 k , 使得对于一切 $t \in [t_0, \infty]$, $\mathbf{W}(t, \tau)$ 的每一个元 $w_{ij}(t, \tau) (i=1, 2, \dots, l; j=1, 2, \dots, m)$ 满足

$$\int_{t_0}^t |w_{ij}(t, \tau)| d\tau \leq k < \infty \quad (6.1.1)$$

证明略。

定理 6.2[定常情况] 对于零初始条件的定常系统, 设初始时刻 $t_0 = 0$, 单位脉冲响应矩阵 $\mathbf{W}(t)$, 传递函数矩阵为 $\mathbf{W}(s)$, 则系统为 BIBO 稳定的充分必要条件为, 存在一个有限常数 k , 使 $\mathbf{W}(t)$ 的每一元 $w_{ij}(t) (i=1, 2, \dots, l; j=1, 2, \dots, m)$ 满足

$$\int_0^\infty |w_{ij}(t, \tau)| d\tau \leq k < \infty$$

或者 $\mathbf{W}(s)$ 为真有理分式函数矩阵, 且每一个元传递函数 $w_{ij}(s)$ 的所有极点在左半复平面。

证明略。

6.1.2 内部稳定性

考虑如下的线性时变系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_a]$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

设系统的外部输入 $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, 初始状态 \mathbf{x}_0 是有界的。系统的状态解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (6.1.2)$$

这里 $\Phi(t, t_0)$ 为时变系统的状态转移矩阵。如果系统的初始状态 \mathbf{x}_0 引起的状态响应式 (6.1.2) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 = 0 \quad (6.1.3)$$

则称系统是内部稳定的或是渐近稳定的。若系统是定常的, 则 $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, 令 $t_0 = 0$, 这时

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}_0 = e^{At}\mathbf{x}_0$$

假定系统矩阵 \mathbf{A} 具有两两相异的特征值, 则

$$e^{At} = \varphi^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \varphi^{-1} \left[\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \right]$$

式中, λ_i 为 \mathbf{A} 的特征值。进一步可得

$$e^{At} = \varphi^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{Q}_i}{(s - \lambda_i)} \right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i e^{\lambda_i t}$$

其中

$$\mathbf{Q}_i = \frac{(s - \lambda_i) \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \Big|_{s=\lambda_i}$$

显然, 当矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值满足

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A)] < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则式 (6.1.3) 成立, 即系统是内部稳定的。

内部稳定性描述了系统状态的自由运动的稳定性。在内部稳定性的定义中, 要求系统的输入 $u(t) \equiv 0$ 。

有界输入-有界状态稳定性 (简记为 BIBS) 问题: 如果对于任意有界输入 $\|u(t)\| \leq k$ 以及任意有界初始状态 $x(t_0)$, 存在一个标量 $\delta(k, t_0, x(t_0)) > 0$ 使得系统状态解满足 $\|x(t)\| \leq \delta$, 则该系统称之为有界输入-有界状态稳定的。对于线性定常系统而言, 满足渐近稳定性时, 一定是 BIBS 稳定的。

6.1.3 内部稳定性和外部稳定性的关系

内部稳定性关心的是系统内部状态的自由运动, 这种运动必须满足渐近稳定条件, 而外部稳定性是对系统输入量和输出量的约束, 这两个稳定性之间的联系必然通过系统的内部状态表现出来, 这里仅就线性定常系统加以讨论。

定理 6.3 线性定常系统如果是内部稳定的, 则系统一定是 BIBO 稳定的。

定理 6.4 线性定常系统如果是 BIBO 稳定的, 却未必是内部稳定的。

定理 6.5 线性定常系统如果是完全能控、完全能观测的, 则内部稳定性与外部稳定性是等价的。

6.2 李亚普诺夫意义下稳定性的定义

稳定性指的是系统在平衡状态下受到扰动后, 系统自由运动的性质, 因此, 系统的稳定性是相对于系统的平衡状态而言的。对于线性定常系统, 由于只有唯一的一个孤立平衡点, 所以只有线性定常系统才能笼统地将平衡点的稳定性看成整个系统的稳定性问题。对于其余系统则可能存在多个平衡点, 而不同平衡点可能表现出不同的稳定性, 我们只能讨论某一平衡状态的稳定性。为此, 首先引入关于平衡状态的概念, 然后讨论其稳定性的有关定义。

6.2.1 平衡状态

稳定性问题是系统自身的一种动态属性, 与外部输入无关。考察系统自由运动状态。令输入 $u = 0$, 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (6.2.1)$$

式中, x —— n 维状态向量, 且显含时间变量 t ;

$f(x, t)$ ——线性或非线性, 定常或时变的 n 维函数, 其展开式为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

初始状态为

$$x(t_0) = x_0$$

相应的解为

$$x(t) = \Phi(t, x_0, t_0)$$

式中, x_0 ——状态向量的初始值;

t_0 ——初始时刻。

在上述状态方程 (6.2.1) 中, 必存在一些状态点 x_e , 当系统运动到达该点时, 系统状态各分量将维持平衡, 不再随时间发生变化, 即 $\dot{x}|_{x=x_e} = 0$, 该类状态点 x_e 即为系统的平衡状态。

平衡状态的定义：设系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

若对所有 t ，状态 \mathbf{x} 满足 $\dot{\mathbf{x}} = 0$ ，则称该状态 \mathbf{x} 为平衡状态，记为 \mathbf{x}_e 。故有下式成立：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0 \quad (6.2.2)$$

由平衡状态在状态空间中所确定的点，称为平衡点。

根据上述平衡状态的定义可知，平衡状态 \mathbf{x}_e 就是方程 (6.2.2) 的解。也就是说式 (6.2.2) 这个代数方程的解，就是平衡状态。对于线性定常系统，其状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

系统的平衡状态应满足 $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = 0$ 。解此方程，当 \mathbf{A} 是非奇异的，则系统存在唯一的一个平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 。当 \mathbf{A} 是奇异的，则系统有无穷多个平衡状态。显然对线性定常系统来说，当 \mathbf{A} 是非奇异的，只有坐标原点是系统的唯一的一个平衡点。

对于非线性系统，方程 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0$ 的解可能有多个，即可能有多个平衡状态。如

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

其平衡状态应满足下列方程

$$\begin{aligned} -x_1 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

因此该系统有 3 个平衡状态

$$\mathbf{x}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由于非零的平衡点总可以通过坐标变换，将其移到状态空间的坐标原点，故为讨论方便又不失一般性，今后只取坐标原点作为系统的平衡点。

6.2.2 范数的概念

李亚普诺夫稳定性（李氏稳定性）定义中采用了范数的概念，因此在介绍李氏稳定性定义之前，首先复习一下范数的定义。

范数的定义 n 维状态空间中，向量 \mathbf{x} 的长度称为向量 \mathbf{x} 的范数，用 $\|\mathbf{x}\|$ 表示，则

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

向量的距离 长度 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$ 称为向量 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}_e 的距离，写成

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{e_1})^2 + \cdots + (x_n - x_{e_n})^2}$$

当 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ 的范数限定在某一范围之内时，则记

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (6.2.3)$$

式 (6.2.3) 的几何意义为，在状态空间中以 \mathbf{x}_e 为球心，以 ε 为半径的一个球域，记为 $S(\varepsilon)$ 。如图 6.1 所示。

利用范数的概念，讨论李亚普诺夫稳定性问题是非常方便的。

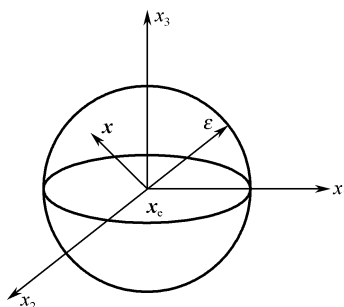


图 6.1 几何意义示意图

6.2.3 李亚普诺夫稳定性定义

定义 6.2 (李亚普诺夫意义下的稳定) 设系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) \equiv \mathbf{0}$$

之平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的 H 邻域为

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq H$$

其中, $H > 0$, $\|\cdot\|$ 为向量的 2 范数或欧几里得范数, 即

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

类似地, 也可以相应定义球域 $S(\varepsilon)$ 和 $S(\delta)$ 。

在 H 邻域内, 若对于任意给定的 $0 < \varepsilon < H$, 均有:

(1) 如果对应于每一个 $S(\varepsilon)$, 存在一个 $S(\delta)$, 使得当 t 趋于无穷时, 始于 $S(\delta)$ 的轨迹不脱离 $S(\varepsilon)$, 则系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 之平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 称为在李亚普诺夫意义下是稳定的。一般地, 实数 δ 与 ε 有关, 通常也与 t_0 有关。如果 δ 与 t_0 无关, 则此时平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 称为一致稳定的平衡状态。

以上定义意味着: 首先选择一个域 $S(\varepsilon)$, 对应于每一个 $S(\varepsilon)$, 必存在一个域 $S(\delta)$, 使得当 t 趋于无穷时, 始于 $S(\delta)$ 的轨迹总不脱离域 $S(\varepsilon)$ 。

(2) 如果平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, 在李亚普诺夫意义下是稳定的, 并且始于域 $S(\delta)$ 的任一条轨迹, 当时间 t 趋于无穷时, 都不脱离 $S(\varepsilon)$, 且收敛于 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$, 则称系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 之平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为渐近稳定的, 其中球域 $S(\delta)$ 被称为平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的吸引域。

实际上, 渐近稳定性比稳定性更重要。考虑到非线性系统的渐近稳定性是一个局部概念, 所以简单地确定渐近稳定性并不意味着系统能正常工作。通常有必要确定渐近稳定性的最大范围或吸引域。它是发生渐近稳定轨迹的那部分状态空间。换句话说, 发生于吸引域内的每一个轨迹都是渐近稳定的。

(3) 对所有的状态 (状态空间中的所有点), 如果由这些状态出发的轨迹都保持渐近稳定性, 则平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 称为大范围渐近稳定。或者说, 如果系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 之平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 渐近稳定的吸引域为整个状态空间, 则称此时系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为大范围渐近稳定的。显然, 大范围渐近稳定的必要条件是在整个状态空间中只有一个平衡状态。

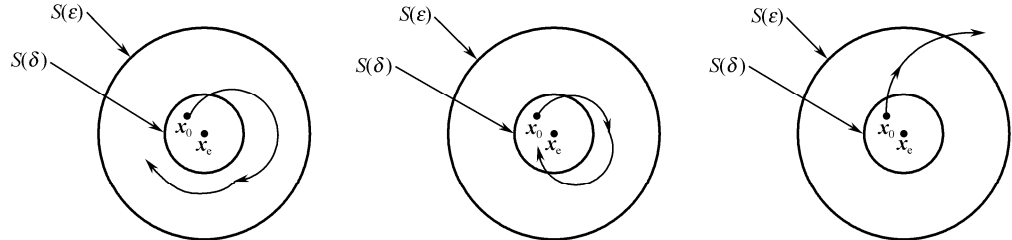
在控制工程问题中, 总希望系统具有大范围渐近稳定的特性。如果平衡状态不是大范围渐近稳定的, 那么问题就转化为确定渐近稳定的最大范围或吸引域, 这通常非常困难。然而, 对所有的实际问题, 如能确定一个足够大的渐近稳定的吸引域, 以致扰动不会超过它就可以了。

(4) 如果对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任一个实数 $\delta > 0$ ，不管这两个实数多么小，在 $S(\delta)$ 内总存在一个状态 \mathbf{x}_0 ，使得始于这一状态的轨迹最终会脱离开 $S(\varepsilon)$ ，那么平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 称为不稳定的。

图 6.2 (a)、(b) 和 (c) 分别表示平衡状态及对应于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的典型轨迹。在图 6.2 (a)、(b) 和 (c) 中，域 $S(\delta)$ 制约着初始状态 \mathbf{x}_0 ，而域 $S(\varepsilon)$ 是起始于 \mathbf{x}_0 的轨迹的边界。

注意，由于上述定义不能详细地说明可容许初始条件的精确吸引域，因而除非 $S(\varepsilon)$ 对应于整个状态平面，否则这些定义只能应用于平衡状态的邻域。

此外，在图 6.2 (c) 中，轨迹离开了 $S(\varepsilon)$ ，这说明平衡状态是不稳定的。然而却不能说明轨迹将趋于无穷远处，这是因为轨迹还可能趋于在 $S(\varepsilon)$ 外的某个极限环（如果线性定常系统是不稳定的，则在不稳定平衡状态附近出发的轨迹将趋于无穷远。但在非线性系统中，这一结论并不一定正确）。



(a) 稳定平衡状态及一条典型轨迹 (b) 渐近稳定平衡状态及一条典型轨迹 (c) 不稳定平衡状态及一条典型轨迹

图 6.2 平衡状态及轨迹

注意，这些定义不是确定平衡状态稳定性概念的唯一方法。实际上，在其他教材中还有另外的定义。

对于线性系统，渐近稳定等价于大范围渐近稳定。但对于非线性系统，一般只考虑吸引区为有限的定范围的渐近稳定。

最后指出，在经典控制理论中稳定性概念与李亚普诺夫意义下的稳定性概念是有一定区别的，例如，在经典控制理论中只有渐近稳定的系统才称为稳定的系统。在李亚普诺夫意义下是稳定的，但却不是渐近稳定的系统，则叫做不稳定系统。两者的区别与联系如表 6.1 所示。

表 6.1 稳定性概念的区别与联系

经典控制理论（线性系统）	不稳定 ($\text{Re}(s) > 0$)	临界情况 ($\text{Re}(s) = 0$)	稳定 ($\text{Re}(s) < 0$)
李亚普诺夫意义下	不稳定	稳定	渐近稳定

6.3 李亚普诺夫稳定性理论

1892 年，李亚普诺夫提出了两种方法（称为第一法和第二法），用于确定由常微分方程描述的动力学系统的稳定性。

第一法包括了利用微分方程显式解进行系统分析的所有步骤。

第二法不需求出微分方程的解，也就是说，采用李亚普诺夫第二法，可以在不求出状态方程解的条件下，确定系统的稳定性。

尽管采用李亚普诺夫第二法分析非线性系统的稳定性时，需要相当的经验和技巧，然而当其他方法无效时，这种方法却能解决非线性系统的稳定性问题。

6.3.1 李亚普诺夫第一法（间接法）

基本思路是：首先将非线性系统线性化，然后计算线性化方程的特征值，最后则是判定原非线性系统的稳定性。

李亚普诺夫第一法通过分析系统微分方程的显式解来分析系统的稳定性。对线性定常系统，它可以直接通过系统的特征根情况来分析。李亚普诺夫第一法的基本思路与经典控制论中的稳定性判别思路基本一致。

设线性定常系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (6.3.1)$$

在讨论系统状态稳定性（内部稳定）时，可以不考虑系统的输入结构和输入信号 \mathbf{u} ，只从系统的齐次状态方程或矩阵 \mathbf{A} 出发。很明显，当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是系统的唯一平衡点。

对于 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的稳定性，我们有如下判据（ \mathbf{x}_e 大范围渐近稳定的充要条件）：

当线性定常系统的系统矩阵 \mathbf{A} 的所有特征根都有负的实部时，其唯一的状态平衡点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是渐近稳定的，而且是大范围渐近稳定。

这就是李亚普诺夫稳定性判别第一法。

例 6.3.1 某系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [1 \quad 0] \mathbf{x}\end{aligned}$$

请分析系统的状态稳定性。

解 $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ， $|\mathbf{A}| \neq 0$

所以 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是系统的唯一平衡点。

系统特征方程为

$$\begin{aligned}|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0 \\ \lambda_1 &= -1, \quad \lambda_2 = 1 > 0\end{aligned}$$

因为有大于零的特征根，所以系统状态不稳定。

对于式 (6.3.1) 所示的线性定常系统，其输入输出的传递函数为

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C} \cdot \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

其中， $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 是矩阵 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的伴随阵。

根据经典控制论知识，当 $\mathbf{W}(s)$ 的极点全部都有负实部时，该系统有界的输入将引起有界的输出（BIBO）。也就是说系统是输出稳定的。从 $\mathbf{W}(s)$ 的表达式可以看出，当式 (6.3.1) 所示线性定常系统的传递函数 $\mathbf{W}(s)$ 没有零极点对消时，系统的状态稳定性和系统的输出稳定性是一致的，因为这时系统矩阵 \mathbf{A} 的特征根就是系统传递函数的极点。

对于式 (6.3.1) 所示的线性定常系统，系统输出 $\mathbf{y}(t)$ 和系统输入 $\mathbf{u}(t)$ 的传递函数为

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1}$$

极点 $s = -1 < 0$ ，所以系统输出稳定。

实际上，系统通过零极点对消，将不稳定的极点消去，从而在输出方面呈现稳定性质。

6.3.2 李亚普诺夫第二法

由力学经典理论可知，对于一个振动系统，当系统总能量（正定函数）连续减小（这意味着总能量对时间的导数必然是负定的），直到平衡状态时为止，则振动系统是稳定的。

李亚普诺夫第二法是建立在更为普遍的情况之上的，即如果系统有一个渐近稳定的平衡状态，则当其运动到平衡状态的吸引域内时，系统存储的能量随着时间的增长而衰减，直到在平稳状态达到极小值为止。然而对于一些纯数学系统，毕竟还没有一个定义“能量函数”的简便方法。为了克服这个困难，李亚普诺夫引出了一个虚构的能量函数，称为李亚普诺夫函数。当然，这个函数无疑比能量更为一般，并且其应用也更广泛。实际上，任一纯量函数 $V(x, t)$ 只要

满足李亚普诺夫稳定性定理的假设条件：1) $\dot{V}(x, t) = \frac{dV(x, t)}{dt}$ 是连续的；2) $V(x, t)$ 是正定的；3) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时 $\|x\| \rightarrow \infty$ $V(x, t) \rightarrow \infty$ 。 $V(x, t)$ 即可作为李亚普诺夫函数（构造可能十分困难）。

李亚普诺夫函数与 x_1, x_2, \dots, x_n 和 t 有关，我们用 $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ 或者 $V(x, t)$ 来表示李亚普诺夫函数。如果在李亚普诺夫函数中不含 t ，则用 $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 或 $V(x)$ 表示。在李亚普诺夫第二法中，其对时间的导数 $\dot{V}(x, t) = dV(x, t) / dt$ 的符号特征，提供了判断平衡状态处的稳定性、渐近稳定性或不稳定性的准则，而不必直接求出方程的解（这种方法既适用于线性系统，也适用于非线性系统）。

例 6.3.2 图 6.3 为一个简单的 RC 一阶电路，试判断这个系统的稳定性。

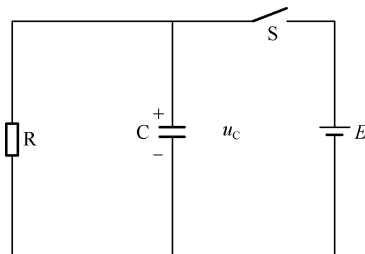


图 6.3 RC 一阶电路

解 选择状态变量 x_1 为电容上的电压 U_C ，得系统的状态方程为

$$RC\dot{x}_1 + x_1 = 0$$

这是一个线性定常系统，其特征方程为

$$RCs + 1 = 0$$

其特征值为 $s = -\frac{1}{RC}$ ，由李亚普诺夫第一法可知，该系统是渐近稳定的。

现由能量的观点来考察这个系统。由上述状态方程可知其状态解为

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

电容器储存的电场能为

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}CU_e^2 = \frac{1}{2}Cx_1^2 = \frac{1}{2}Cx_1^2(0)e^{-\frac{2t}{RC}} > 0$$

它随时间的变化率是

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{2}{RC}V(\mathbf{x}) < 0$$

这表明本系统的运动是一个放电过程,其能量随时间而减少,直到系统运动到平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$,其能量为零,运动停止在该平衡状态。根据李亚普诺夫关于稳定性的定义,可以判断该系统在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的。

6.3.3 二次型及其正定性

二次型标量函数 $V(\mathbf{x})$ 如下:

$$V(\mathbf{x}) = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (6.3.2)$$

其中,如果 $p_{ik} = p_{ki}$,则称 \mathbf{P} 为实对称矩阵。则有

① 正定性:当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时,才有 $V(\mathbf{x}) = 0$;对任意非零向量 \mathbf{x} ,恒有 $V(\mathbf{x}) > 0$,则 $V(\mathbf{x})$ 为正定的。

② 负定性:当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时,才有 $V(\mathbf{x}) = 0$;对任意非零向量 \mathbf{x} ,恒有 $V(\mathbf{x}) > 0$,则 $V(\mathbf{x})$ 为负定的。

③ 半正定和半负定:

如果对任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,恒有 $V(\mathbf{x}) \geq 0$,则 $V(\mathbf{x})$ 为半正定的;

如果对任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,恒有 $V(\mathbf{x}) \leq 0$,则 $V(\mathbf{x})$ 为半负定的。

④ (半)正定和(半)负定间的关系:

$V(\mathbf{x})$ 为正定,则 $-V(\mathbf{x})$ 为负定的;

$V(\mathbf{x})$ 为半正定,则 $-V(\mathbf{x})$ 为半负定的。

⑤ 不定性:如果无论取多么小的非零向量 \mathbf{x} , $V(\mathbf{x})$ 可为正值也可为负值,则 $V(\mathbf{x})$ 为不定的。

对于二次型函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 来说,其正(负)定性和实对称矩阵 \mathbf{P} 的正(负)定性相一致。因此,可以通过赛尔维斯特准则来判断其正(负)定性。

给定 $n \times n$ 维实对称矩阵 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

则 $\Delta_1 = p_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$, \cdots , $\Delta_n = |\mathbf{P}|$ 称为矩阵 \mathbf{P} 的各阶主子行列式。

赛尔维斯特准则描述如下:

① 二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 为正定,或实对称矩阵 \mathbf{P} 为正定的充要条件是:矩阵 \mathbf{P} 的所有顺

序主子行列式均为正，即

$$\Delta_1 = p_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = |\mathbf{P}| > 0$$

② 二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 为负定，或实对称阵 \mathbf{P} 为负定的充要条件是：矩阵 \mathbf{P} 的奇数阶主子行列式小于零，同时偶数阶主子行列式大于零，即

$$\Delta_i > 0, \quad i \text{ 为偶数}$$

$$\Delta_i < 0, \quad i \text{ 为奇数}$$

③ 二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 为半正定，或实对称阵 \mathbf{P} 为半正定的充要条件是：矩阵 \mathbf{P} 的各阶主子行列式满足下列条件

$$\Delta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta_i = 0, \quad i = n$$

④ 二次型 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 为半负定，或实对称阵 \mathbf{P} 为半负定的充要条件是：矩阵 \mathbf{P} 的各阶主子行列式满足下列条件

$$\Delta_i \geq 0, \quad i \text{ 为偶数}$$

$$\Delta_i \leq 0, \quad i \text{ 为奇数}$$

$$\Delta_i = 0, \quad i = n$$

例 6.3.3 试证明下列二次型是正定的。

$$V(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

证明 二次型 $V(\mathbf{x})$ 可写为如下形式：

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

求解以上实对称阵 \mathbf{P} 的各阶顺序主子行列式

$$\Delta_1 = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 17$$

所以

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0$$

因为实对称阵 \mathbf{P} 的顺序主子行列式均为正值，根据赛尔维斯特准则可知， $V(\mathbf{x})$ 是正定的。

6.3.4 李亚普诺夫第二法稳定性定理

可以证明：如果 \mathbf{x} 为 n 维向量，且其纯量函数 $V(\mathbf{x})$ 正定，则满足

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -C$$

的状态 \mathbf{x} 处于 n 维状态空间的封闭超曲面上，且至少处于原点附近，式中 C 是正常数。随着 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ，上述封闭曲面可扩展为整个状态空间。如果 $C_1 < C_2$ ，则超曲面 $V(\mathbf{x}) = C_1$ 完全处于超曲面 $V(\mathbf{x}) = C_2$ 的内部。

对于给定的系统，若可求得正定的纯量函数 $V(\mathbf{x})$ ，并使其沿轨迹对时间的导数总为负值，则随着时间的增加， $V(\mathbf{x})$ 将取越来越小的 C 值。随着时间的进一步增长，最终 $V(\mathbf{x})$ 变为零，而 \mathbf{x} 也趋于零。这意味着，状态空间的原点是渐近稳定的。李亚普诺夫主稳定性定理就是前述

事实的普遍化，它给出了渐近稳定的充要条件。该定理阐述如下：

定理 6.6 考虑如下非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t)$$

式中

$$f(0, t) \equiv 0, \quad \text{对所有 } t \geq t_0$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的纯量函数 $V(\mathbf{x}, t)$ ，且满足以下条件：

(1) $V(\mathbf{x}, t)$ 正定；

(2) $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 负定，

则在原点处的平衡状态是（一致）渐近稳定的。

进一步，若 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ ，则在原点处的平衡状态是大范围一致渐近稳定的。

① 物理意义：李亚普诺夫函数 $V(\mathbf{x}, t)$ 是一个能量函数，能量总是大于零的，即 $V(\mathbf{x}) > 0$ 。若随系统的运动，能量在连续地减小，则 $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$ 。当能量最终耗尽，此时系统又回到平衡状态。符合渐近稳定的定义，所以是渐近稳定的。

② 几何意义：以二维状态空间为例，设李亚普诺夫函数为二次型函数，即

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

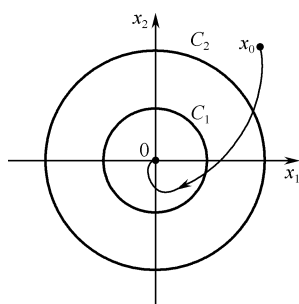


图 6.4 能量等值线与典型
轨线

一方面， $V(\mathbf{x})$ 是能量函数，若令 $V(\mathbf{x}) = C_i$ ，取一系列常值 $0 < C_1 < C_2 < C_3 \cdots$ ，则代表了不同能量的等值线。根据 $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = C_i$ ，可知这些等值线是以原点为圆心，以 $\sqrt{C_i}$ 为半径的同心圆族。半径越小能量越小。当 $C_i \rightarrow 0$ 时， $V(\mathbf{x})$ 趋于零。另一方面 $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2$ ，所以 $V(\mathbf{x})$ 又表示状态 \mathbf{x} 到原点距离的平方。若 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ，表示随着时间的推移，能量不断地减小，同时状态 \mathbf{x} 不断地趋向原点。最终当 $V(\mathbf{x}) = 0$ 时，状态收敛于坐标原点，如图 6.4 所示。

③ 该定理给出的是渐近稳定的充分条件，即如果能找到满足定理条件的 $V(\mathbf{x})$ ，则系统一定是渐近稳定的。但如果找不到这样的 $V(\mathbf{x})$ ，并不意味着系统是不稳定的。

④ 该定理本身并没有指明 $V(\mathbf{x})$ 的建立方法。一般情况下， $V(\mathbf{x})$ 不是唯一的。许多情况下，李亚普诺夫函数可以取为二次型函数，即 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 的形式，其中 \mathbf{P} 阵的元素可以是时变的，也可以是定常的。但在一般情况下， $V(\mathbf{x})$ 不一定是这种简单的二次型形式。

该定理对于线性系统、非线性系统、时变系统及定常系统都是适用的，是一个最基本的稳定性判别定理。

例 6.3.4 设系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

试确定其平衡状态的稳定性。

解 由平衡点方程得

$$\begin{aligned} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) &= 0 \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

解得唯一的平衡点为 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, 即 $x_e = 0$, 为坐标原点。

选取李亚普诺夫函数为二次型函数, 即

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

显然 $V(\mathbf{x})$ 是正定的。 $V(\mathbf{x})$ 的一阶全导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2 = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

因此 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的。又当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 故由定理 6.6, 平衡点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围渐近稳定的。

一般情况下, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的条件难以满足, 那么能不能用 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是半负定这个条件代替? 为此有以下的定理 6.7。

定理 6.7 设系统的状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为其唯一的平衡状态, 如果有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$ 存在, 并且满足以下三个条件:

① $V(\mathbf{x})$ 是正定的;

② $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是半负定的;

③ 对任意初始时刻 t_0 的任意状态 $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, 当 $t \geq t_0$ 时, 除了在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时有 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 外, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 不恒等于零。则系统在原点处的平衡状态是渐近稳定的。如果随着 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, 有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 则原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

这里所说的不恒等于零意味着仅在某个特定时刻, 在某个点上和某个特定的曲面相切, 然后状态会继续向平衡状态移动。恒等于零就意味着运动轨迹是某个特定的曲面 $V(\mathbf{x}) = C$ 。

例 6.3.5 某系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\end{aligned}$$

试确定其平衡状态的稳定性。

解

① 求系统的平衡状态。在状态方程中, 令 $\dot{x}_1 = 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$, 可得 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是系统唯一的平衡状态。

② 构造李亚普诺夫函数。假设正定标量函数为

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = -2x_2^2$$

因此, $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是半负定的。

当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$$

当 $x_2 = 0$ 时, 不论 x_1 是否为零, 也有

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$$

但只要 $x_2 \neq 0$, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 就不等于零。因此, $\dot{V}(\mathbf{x})$ 不恒等于零。所以, 由定理 6.7 可知。系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是渐近稳定的。并且, $V(\mathbf{x})$ 是系统的一个李亚普诺夫函数。

③ 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, 即 $(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$, 得 $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$, 则系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是

大范围渐近稳定的。

以上两个定理仅是李亚普诺夫稳定性判据的充分条件，而非必要条件，判稳过程就是寻找李亚普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$ 。如果没有找到合适的 $V(\mathbf{x})$ ，也不能因此判断系统不稳定。这两个稳定性定理，既适合于线性系统和非线性系统，也适合于定常系统和时变系统，具有普遍意义。

对于系统的不稳定性，有以下的定理 6.8。

定理 6.8 设系统状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ， $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 为其平衡状态。如果存在一个标量函数 $V(\mathbf{x})$ ，它具有连续的一阶偏导数，且满足下列条件：

① $V(\mathbf{x})$ 在原点的某一邻域内是正定的；

② $\dot{V}(\mathbf{x})$ 在同样的邻域内也是正定的，

则系统在原点处的平衡状态是不稳定的。

例 6.3.6 某系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

试确定其平衡状态的稳定性。

解 ①求系统的平衡状态。在状态方程中，令 $\dot{x}_1 = 0$ 和 $\dot{x}_2 = 0$ ，可得 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是系统唯一的平衡状态。

② 假设正定标量函数为

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

因此， $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ ， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是正定的。所以，由定理 6.8 可知，系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是不稳定的。

不稳定性定理 6.8 也是一个充分条件判据。

综上所述，利用李亚普诺夫第二法判断系统的稳定性，关键是如何构造一个满足条件的李亚普诺夫函数，而李亚普诺夫第二法本身并没有提供构造李亚普诺夫函数的一般方法。所以，尽管李亚普诺夫第二法在原理上是简单的，但实际应用并不是一件易事。尤其对复杂的系统更是如此，需要有相当的经验和技巧。不过，对于线性系统和某些非线性系统，已经找到了一些可行的方法来构造李亚普诺夫函数。

6.4 线性定常连续系统的稳定性

前已指出，李亚普诺夫第二法不仅对非线性系统，而且对线性定常系统、线性时变系统，以及线性离散系统等均完全适用。

利用李亚普诺夫第二法对线性系统进行分析，有如下几个特点：

- (1) 都是充要条件，而非仅充分条件；
- (2) 渐近稳定性等价于李亚普诺夫方程的存在性；
- (3) 渐近稳定时，必存在二次型李亚普诺夫函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 及 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ ；
- (4) 对于线性自治系统，当系统矩阵 \mathbf{A} 非奇异时，仅有唯一平衡点，即原点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ；
- (5) 渐近稳定就是大范围渐近稳定，两者完全等价。

众所周知，对于线性定常系统，其渐近稳定性的判别方法很多。例如，对于连续时间定

常系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，渐近稳定的充要条件是： \mathbf{A} 的所有特征值均有负实部，或者相应的特征方程 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$ 的根具有负实部。但为了避免困难的特征值计算，如 Routh-Hurwitz 稳定性判据通过判断特征多项式的系数来直接判定稳定性，Nyquist 稳定性判据根据开环频率特性来判断闭环系统的稳定性。这里将介绍的线性系统的李亚普诺夫稳定性方法，也是一种代数方法，也不要求把特征多项式进行因式分解，而且可进一步应用于求解某些最优控制问题。

6.4.1 线性连续系统稳定性分析

定理 6.9 设描述系统的方程为 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ (\mathbf{x} 为 n 维向量， \mathbf{A} 为 $n \times n$ 维常数矩阵且非奇异)，系统在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处渐近稳定的充分必要条件是：对任意给定的一个正定对称矩阵 \mathbf{Q} ，存在一个正定对称矩阵 \mathbf{P} ，且满足 $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ 。而且，这个系统的一个李亚普诺夫函数是标量函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ 。

证明 对 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，在平衡点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ：

(1) 设 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ ，当 \mathbf{P} 正定对称，由赛尔维斯特判据得 $V(\mathbf{x}) > 0$ ；

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \end{aligned}$$

当 \mathbf{Q} 正定，则 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ；

当满足 $-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}$ 时，系统渐近稳定。

说明：

(1) 任取 \mathbf{Q} 正定，满足方程的 \mathbf{P} 唯一，若 \mathbf{P} 正定，系统渐近稳定。

(2) 如果 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ 沿任意轨迹不恒为零，那么 \mathbf{Q} 可以半正定的。

注意，如果正半定矩阵 \mathbf{Q} 满足下列秩的条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

则 $\dot{V}(t)$ 沿任意轨迹不恒等于零。

(3) 为计算方便，在选定正定实对称矩阵 \mathbf{Q} 时，可取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ，于是矩阵 \mathbf{P} 可按下式确定：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I} \quad (6.4.1)$$

然后检验 \mathbf{P} 是不是正定的。

应用定理判稳步骤如下：

(1) 确定系统的平衡状态 \mathbf{x}_e ，通常 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ；

(2) 设 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ ，取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ；

(3) 由 $\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ ，求出 \mathbf{P} ；

(4) 由赛尔维斯特 (Sylvester) 判据，判定 \mathbf{P} 是否正定。若 $\mathbf{P} > 0$ ，系统渐近稳定，且 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ ，为系统的一个李亚普诺夫函数。

例 6.4.1 设二阶系统的方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A 为非奇异, 原点是一个唯一的平衡状态, 试确定该系统的稳定性。

解

设 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (-\mathbf{Q}) \mathbf{x}$, 取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, 则 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$ 。

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{21} & -2p_{22} \\ 3p_{11} - 2p_{21} & 3p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2p_{21} & 3p_{11} - 2p_{21} \\ -2p_{22} & 3p_{21} - 2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由于 $p_{21} = p_{12}$, 故

$$\begin{bmatrix} -4p_{12} & 3p_{11} - 2p_{12} - 2p_{22} \\ 3p_{11} - 2p_{12} - 2p_{22} & 6p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

将矩阵方程展开

$$\begin{cases} -4p_{12} = -1 \\ 3p_{11} - 2p_{12} - 2p_{22} = 0 \\ 6p_{12} - 4p_{22} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4} \\ p_{11} = \frac{7}{12} \\ p_{22} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

故 \mathbf{P} 阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

根据塞尔维斯特准则:

$$|p_{11}| = \frac{7}{12} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{vmatrix} = \frac{35}{96} - \frac{1}{16} > 0$$

所以, \mathbf{P} 是正定的, 即系统是大范围渐近稳定的。

由此得

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \frac{7}{12} x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{5}{8} x_2^2$$

例 6.4.2 试确定如图 6.5 所示系统的增益 K 的稳定范围。

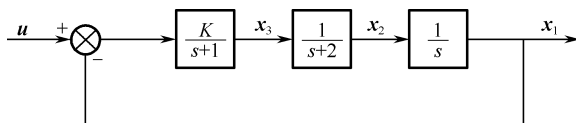


图 6.5 控制系统示意图

解 容易推得系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

在确定 K 的稳定范围时, 假设输入 \mathbf{u} 为零。于是上式可写为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (6.4.2)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \quad (6.4.3)$$

$$\dot{x}_3 = -Kx_1 - x_3 \quad (6.4.4)$$

由式 (6.4.2) ~ 式 (6.4.4) 可发现, 原点是平衡状态。假设取正半定的实对称矩阵 \mathbf{Q} 为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.5)$$

由于除原点外 $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ 不恒等于零, 因此可选上式的 \mathbf{Q} 。为了证实这一点, 注意

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = -x_3^2$$

取 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 恒等于零, 意味着 x_3 也恒等于零。如果 x_3 恒等于零, x_1 也必恒等于零, 因为由式 (6.4.4) 可得

$$0 = -Kx_1 = 0$$

如果 x_1 恒等于零, x_2 也恒等于零。因为由式 (6.4.2) 可得

$$0 = x_2$$

于是 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 只在原点处才恒等于零。因此, 为了分析稳定性, 可采用由式 (6.4.5) 定义的矩阵 \mathbf{Q} 。

也可检验下列矩阵的秩

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & -K & 1 \end{bmatrix}$$

显然, 对于 $K \neq 0$, 其秩为 3。因此可选择这样的 \mathbf{Q} 用于李亚普诺夫方程。

现在求解如下李亚普诺夫方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

它可重写为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对 \mathbf{P} 的各元素求解, 可得

$$P = \begin{bmatrix} \frac{K^2+12K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K} & 0 \\ \frac{6K}{12-2K} & \frac{3K}{12-2K} & \frac{K}{12-2K} \\ 0 & \frac{K}{12-2K} & \frac{6K}{12-2K} \end{bmatrix}$$

为使 P 成为正定矩阵，其充要条件为

$$12-2K > 0 \text{ 和 } K > 0$$

或

$$0 < K < 6$$

因此，当 $0 < K < 6$ 时，系统在李亚普诺夫意义下是稳定的，也就是说，原点是渐近稳定的。

6.4.2 线性时变连续系统

1. 渐近稳定的判别方法

定理 6.10 线性时变连续系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}_e &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

在平衡点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处，渐近稳定的充要条件是：对任意给定的连续对称正定矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ ，存在一个连续的对称正定矩阵 $\mathbf{P}(t)$ ，使得

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (6.4.7)$$

并且

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (6.4.8)$$

是系统的李亚普诺夫函数。

证明：只证充分性，即如果满足上述要求的 \mathbf{P} 存在，则系统在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的。

设 $\mathbf{P}(t)$ 是存在的，且 $\mathbf{P}(t)$ 是正定的，即 $\mathbf{P}(t) > 0$ 。故选 $V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$ ，则 $V(\mathbf{x}, t) > 0$ ，即也是正定的。又

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}} \\ &= [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}]^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}] \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t)] \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} \end{aligned}$$

故

$$\mathbf{Q}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \dot{\mathbf{P}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)$$

若 \mathbf{Q} 是正定对称矩阵，则 $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ 是负定的。由定理 6.9 知，系统在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的。上式又可写成下面形式的矩阵方程：

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{Q}(t)$$

[证毕]

2. 判断的一般步骤

(1) 确定系统的平衡状态。

(2) 任选正定对称矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ ，代入矩阵方程

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{Q}(t)$$

解出矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 。该矩阵方程属于 Riccati 矩阵微分方程，其解为

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T(t)\mathbf{P}(t_0)\Phi(t_0, t) - \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)\mathbf{Q}(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \quad (6.4.9)$$

式中， $\Phi(\tau, t)$ 是系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的状态转移矩阵； $\mathbf{P}(t_0)$ 是 Riccati 方程的初始条件。

同样，为计算方便，可选 $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ，则

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T(t_0, t)\mathbf{P}(t_0)\Phi(t_0, t) - \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)\Phi(\tau, t)d\tau \quad (6.4.10)$$

(3) 判断矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 是否满足连续、对称正定性。若满足，则线性时变系统是渐近稳定的，且

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

6.5 线性定常离散系统的稳定性

定理 6.11 设离散系统为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$$

系统在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处大范围渐近稳定的充要条件是：对于给定的一个正定对称矩阵 \mathbf{Q} ，存在一个正定的对称矩阵 \mathbf{P} ，且满足 $\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ ，并且 $V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)$ 是这个系统的一个李亚普诺夫函数。

1. 证明

(1) $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ ，设所选的一个李亚普诺夫函数为 $V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) > 0$ ， \mathbf{P} 为实对称矩阵；

(2) 变量的变化率用差分来表示：

$$\begin{aligned} \Delta V[\mathbf{x}(k)] &= V[\mathbf{x}(k+1)] - V[\mathbf{x}(k)] \\ \Delta V[\mathbf{x}(k)] &= \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ &= [\mathbf{G}\mathbf{x}(k)]^T\mathbf{P}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k)] - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)[\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P}]\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)[- \mathbf{Q}]\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

$V[\mathbf{x}(k)]$ 选正定， \mathbf{P} 正定。

$\Delta V[\mathbf{x}(k)]$ 选负定，需 \mathbf{Q} 正定，即 $\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P}$ 负定，

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P})$$

所以，对于选定的 \mathbf{P} 正定，系统渐近稳定的充要条件是 \mathbf{Q} 正定。

注意：若 $\Delta V[\mathbf{x}(k)] = -\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$ 沿任意一解的序列不恒等于零， \mathbf{Q} 可取半正定矩阵。

2. 判断步骤

(1) 确定 \mathbf{x}_e ；

(2) 取 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ，由 $\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{I}$ ，解出 \mathbf{P} ；

(3) 判断 \mathbf{P} 是否正定。若 \mathbf{P} 正定，系统渐近稳定，且 $V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k)$ 为系统的李亚普诺夫函数。

例 6.5.1 设线性离散系统为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$$

其中 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k/2 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $k > 0$ 。

试用李亚普诺夫直接法, 确定使系统平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 为渐近稳定的 k 的范围。

解 设 $\mathbf{Q} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是正定的, 代入 $\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{I}$, 求得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right] & k/\left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right] \\ 0 & k/\left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right] & \left[3 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right]/\left[1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right] \end{bmatrix}$$

当 $-2 < k < 2$ 时, 矩阵 \mathbf{P} 正定, 系统在平衡状态是渐近稳定的。

6.6 非线性系统的稳定性分析

与线性系统相比, 分析非线性系统的稳定性要复杂得多。这是因为; 第一, 非线性特性具有多样性和复杂性; 第二, 非线性系统的平衡状态可能不止一个, 而且可能有的是稳定的, 有的是不稳定的; 第三, 李亚普诺夫第二法只给出了充分条件, 在很多情况下, 往往因为找不到满足定理条件的李亚普诺夫函数, 而不能对系统平衡状态的稳定性作出判断。这就促使人们研究出许多建立在李亚普诺夫第二法基础上的判断稳定性的特殊方法, 给出了一些非线性系统构造李亚普诺夫函数的方法。

本节主要介绍研究非线性系统稳定性充分条件的两种比较有效的方法, 即克拉索夫斯基 (Krasovski) 法和变量梯度法。

6.6.1 克拉索夫斯基法

针对非线性系统, 克拉索夫斯基仿照线性系统用 \mathbf{x} 构成李亚普诺夫函数的形式, 提出了以状态变量的导数 $\dot{\mathbf{x}}$ 来写李亚普诺夫函数。

定理 6.12 设非线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (6.6.1)$$

假设原点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是平衡状态, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 对 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 连续可微, 系统的雅可比 (Jacobian) 矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6.6.2)$$

则系统在原点渐近稳定的充分条件是：任给正定实对称阵 \mathbf{P} ，使下列矩阵为正定的：

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{J}^T(\mathbf{x})\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{J}(\mathbf{x})] \quad (6.6.3)$$

并且

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = f^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} f(\mathbf{x}) \quad (6.6.4)$$

是系统的一个李亚普诺夫函数。

如果当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ，有 $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则系统在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围渐近稳定的。

证明 克拉索夫斯基建议构造李亚普诺夫函数为：

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = f^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} f(\mathbf{x})$$

其中， \mathbf{P} 为正定对称矩阵，因而 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 正定。且有

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \dot{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} f(\mathbf{x}) + f^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \dot{f}(\mathbf{x}) \quad (6.6.5)$$

而

$$\dot{f}(\mathbf{x}) \approx \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (6.6.6)$$

将式 (6.6.6) 代入式 (6.6.5) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{J}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})]^T \mathbf{P} f(\mathbf{x}) + f^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{J}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \\ &= f^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} f(\mathbf{x}) + f^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{J}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \\ &= f^T(\mathbf{x}) [\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{J}(\mathbf{x})] f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

或

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = -f^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (6.6.7)$$

式中

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{J}(\mathbf{x})]$$

式 (6.6.7) 表明，要使系统渐近稳定， $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ 必须是负定的，因此 $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 必须是正定的。

如果 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时， $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，则系统在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 是大范围渐近稳定的。

(1) 如果取 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ，则

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = -[\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})] \quad (6.6.8)$$

这时有

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = f^T(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \quad (6.6.9)$$

和

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = f^T(\mathbf{x}) [\mathbf{J}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})] f(\mathbf{x}) \quad (6.6.10)$$

(2) 要使 \mathbf{Q} 为正定，必须使 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 主对角线上的所有元素不恒为零，即

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

这实际上要求状态方程中第 i 个方程要含有 x_i 这个对应分量，否则 $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ 就不可能是正定的。此乃该定理的局限性。

(3) 线性系统可看成是非线性系统的特殊情况，故该定理也适用于线性定常系统，即设 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ，此时，雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$$

由式 (6.6.8) 得

$$Q(x) = -(A^T + A)$$

若矩阵 A 为非奇异, 则当 $Q(x)$ 为正定时, 即当矩阵 $(A^T + A)$ 为负定时, 系统的平衡状态 $x_e = 0$ 是大范围渐近稳定的。且李亚普诺夫函数为

$$V(x) = x^T (A^T + A)x$$

(4) 该定理对非线性系统的一个平衡状态只给出了稳定的充分条件, 若 $Q(x)$ 不是正定的, 则不能得出任何结论, 此时这种方法无效。因此在应用定理 6.12 时, 必须十分小心。

例 6.6.1 利用克拉索夫斯基定理确定下列系统在平衡状态 $x = 0$ 的稳定性。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3\end{aligned}$$

解 这个系统有 $f_1(x) = -x_1$, $f_2(x) = x_1 - x_2 - x_2^3$, $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$

$$J(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$P = I, \quad Q(x) = -[J^T(x) + J(x)] = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

由于 $Q(x)$ 对所有的 $x \neq 0$ 是正定的, 故系统在平衡状态 $x = 0$ 是渐近稳定的。此外, 随着 $\|x\| \rightarrow \infty$, 有

$$f^*(x)f(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty$$

所以平衡状态 $x = 0$ 是大范围渐近稳定的。

克拉索夫斯基定理既可适用于线性系统, 也可适用于非线性系统, 不难看出, 当用于线性系统时, 它与定理 6.9 是完全一致的。当非线性特性能用解析式表达, 而且系统的阶次又不是太高时, 用克拉索夫斯基方法分析非线性系统的渐近稳定性还是比较方便的。不过应当注意, 克拉索夫斯基定理所给出的只是渐近稳定的充分条件, 而非必要条件。对于某些非线性系统, 可能 $Q(x)$ 并不具有正定性, 这时克拉索夫斯基定理对系统稳定与否不提供任何信息。

6.6.2 变量梯度法

由舒尔茨 (Schultz) 和基布逊 (Gibson) 在 1962 年提出的变量梯度法, 为非线性系统构造李亚普诺夫函数提供了一种比较实用的方法。

1. 变量梯度法的基本思想

设不受外部作用的非线性系统

$$\dot{x} = f(x, t)$$

的平衡状态是状态空间原点。先假设找到了判断其渐近稳定的李亚普诺夫函数 $V(x)$, 它是状态 x 的显函数, 而不是时间 t 的显函数, 并且 $V(x)$ 的梯度 $\text{grad}V$ 存在。 $\text{grad}V$ 是下面的 n 维列向量:

$$\text{grad}V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ 或写成 } \nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \vdots \\ \nabla V_n \end{bmatrix} \quad (6.6.11)$$

舒尔茨和基布逊建议, 先把 $\mathbf{grad}V$ 假设为某种形式, 并由此求出符合要求的 $V(\mathbf{x})$ 和 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 。
因为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n = (\mathbf{grad}V)^T \dot{\mathbf{x}} \quad (6.6.12)$$

可知, $V(\mathbf{x})$ 可由 $\mathbf{grad}V$ 做积分来求取, 即

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}) dt = \int_0^t (\mathbf{grad}V)^T \dot{\mathbf{x}} dt \\ &= \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{grad}V)^T d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \nabla V_i dx_i \end{aligned} \quad (6.6.13)$$

式中, 积分上限 \mathbf{x} 是空间的一点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 。若对 $\mathbf{grad}V$ 施加一点限制可以做到上述积分与路径无关。也就是若满足 $\mathbf{grad}V$ 的 n 维旋度等于零, 即 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}V) = 0$, 则 V 可视为保守场, 而式 (6.6.13) 与积分路径无关。 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}V) = 0$ 的充要条件是 $\mathbf{grad}V$ 的雅可比矩阵

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{grad}V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \nabla V_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

是对称矩阵, 即

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.6.14)$$

当上述条件满足时, 式 (6.6.13) 的积分路径可以任意选择, 当然可以选择一条简单的路径, 即依序沿各个坐标轴 x_i 方向积分:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{x_1 (x_2=x_3=\cdots=x_n=0)} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2 (x_1=x_3=\cdots=x_n=0)} \nabla V_2 dx_2 + \cdots + \\ &\quad \int_0^{x_n (x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0)} \nabla V_n dx_n \end{aligned} \quad (6.6.15)$$

若按上述方法构造出的李亚普诺夫函数, 满足 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的, 而 $V(\mathbf{x})$ 是正定的, 则系统在平衡点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的。

(1) 首先将李亚普诺夫函数的梯度设为如下形式

$$\mathbf{grad}V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \quad (6.6.16)$$

式中, $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为待定系数, 它们可以是常数, 也可以是 t 的函数, 或者是 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数。通常将 a_{ij} 选为常数。

(2) 利用式 (6.6.12) 由 $\mathbf{grad}V$ 构成 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 。由 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的条件, 可以决定一部分待定参数 a_{ij} 。

(3) 按限制条件 (6.6.14), 决定其余待定参数 a_{ij} 。

(4) 按式 (6.6.15) 做积分, 求出 $V(\mathbf{x})$, 并验证其正定性。如不正定, 需重新选择诸待定参数 a_{ij} , 直到 $V(\mathbf{x})$ 正定为止。

(5) 确定渐近稳定范围。

例 6.6.2 设系统方程为

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

利用变量梯度法构造李亚普诺夫函数，并分析系统的稳定性。

解 设 $V(\mathbf{x})$ 的梯度为

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix}$$

则由 ∇V 可写出 $\dot{V}(\mathbf{x})$ ，由式 (6.6.12) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= (\nabla V)^T \dot{\mathbf{x}} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\dot{x}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\dot{x}_2 \\ &= -a_{11}x_1^2 + 2a_{11}x_1^3x_2 - a_{12}x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 - a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

又由限制条件式 (6.6.14) 得

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = a_{12} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = a_{21}$$

故取 $a_{11}=1$ ， $a_{22}=2$ ， $a_{12}=a_{21}=0$ ，则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1^3x_2 = -2x_2^2 - x_1^2(1 - 2x_1x_2)$$

所以若 $1 - 2x_1x_2 > 0$ ，即 $2x_1x_2 < 1$ ，则 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的。按式 (6.6.15) 做积分

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \nabla V_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2 dx_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

可以看出， $V(\mathbf{x})$ 是正定的。因此，在 $2x_1x_2 < 1$ 的范围内，系统在 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处是渐近稳定的。

必须指出，用这种方法若不能构造出满足要求的李亚普诺夫函数，并不意味着平衡状态是不稳定的。

6.7 利用 MATLAB 分析系统的稳定

6.7.1 利用李亚普诺夫第一法判断系统的稳定性

MATLAB 控制系统工具箱提供了 `poly`、`roots` 和 `eig` 函数，通过调用它们，即可得出线性定常系统的特征值，进而得出系统稳定性的结论。

例 6.7.1 已知线性定常连续系统状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$$

试用特征值判据判断系统的渐近稳定性。

解 系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

函数 `poly` 用来求矩阵特征多项式系数，`root` 用来求取特征值。

MATLAB 程序如下：

```
A=[0 1 ; 2 -1];  
P=poly(A), V=roots(P)
```

运行以上程序可得：

```
P=
    1    1   -2
V=
   -2
    1
```

特征值为-2, 1, 故系统不稳定。

例 6.7.2 设线性定常系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试用 MATLAB 判断系统的稳定性。

解 求系统特征根程序：

```
A=[-8, -16, -6; 1, 0, 0; 0, 1, 0];
P=poly(A);
roots(P)
```

运行结果为

```
ans=
-5.0861
-2.4280
-0.4859
```

可见，特征方程的全部特征根均具有负实部，故系统是稳定的。

事实上，本题也可调用 **eig** 函数直接求取矩阵 **A** 的特征值，即 MATLAB 程序：

```
A=[-8, -16, -6; 1, 0, 0; 0, 1, 0];
Eig(A)
```

6.7.2 利用李亚普诺夫第二法判断系统的稳定性

求解李亚普诺夫函数的方程还有 **dlyap**, **lyap2**, 函数 **dlyap** 用来求解离散的李亚普诺夫方程。函数 **lyap2** 是采用特征值分解技术来求解李亚普诺夫方程的，其运算速度比函数 **lyap** 快很多。它们的调用格式为

$$\mathbf{x} = \text{dlyap}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$$

$$\mathbf{x} = \text{dlyap2}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$$

例 6.7.3 已知线性系统动态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试计算李亚普诺夫方程的解，并利用李亚普诺夫函数确定系统的稳定性并求李亚普诺夫函数。

解 首先选择正定实对称矩阵 Q 为单位矩阵, 即

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据题意, 给出调用函数 lyap 的程序。

```
a=[0 1; -1 -1]; q=[1 0; 0 1];  
if det(a)~=0  
    p=lyap(a, q)  
    det1=det(p(1, 1))  
    detp=det(p)  
end
```

运行程序可得

```
p =  
    1.5000    -0.5000  
  
det1 =  
    1.5000  
  
detp =  
    1.2500
```

即李亚普诺夫方程的解为

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

程序已对各主子行列式 (det1, detp) 进行计算, 计算结果说明 P 阵确定是正定阵。李亚普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

在状态空间内, $V(\mathbf{x})$ 是正定的, 而

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (-I) \mathbf{x} = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2)$$

在状态空间内 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的。另有, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 因此系统原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。

思考题与习题

- 6.1 什么是系统的 BIBO 稳定性? 什么是系统的内部稳定性? 两者有什么关系?
- 6.2 李亚普诺夫函数具有什么性质?
- 6.3 什么是系统的平衡状态? 什么是李亚普诺夫关于稳定性的一般定义?
- 6.4 试确定下述二次型为正定时, 待定常数的取值范围:

$$V(\mathbf{x}) = a_1 x_1^2 + b_1 x_2^2 + c_1 x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_2 x_3 - 2x_1 x_3$$

6.5 试确定下列系统平衡状态的稳定性:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + 3x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) - 3x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = x_1(k)$$

6.6 设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试确定平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 的稳定性。

6.7 设非线性系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2a(1 - x_1^2)x_2$$

式中, a 为常数。试确定系统的平衡点, 并应用李亚普诺夫第一法讨论平衡点的稳定性。

6.8 试确定下列非线性系统在原点 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 处的稳定性。

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

6.9 试用李亚普诺夫第二法分析下列线性系统的稳定性。

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

6.10 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 4x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

(1) 采用李亚普诺夫第一法;

(2) 采用克拉索夫斯基方法;

(3) 采用变量梯度法;

(4) 取 $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$;

比较以上 4 种方法的结果。

第7章 线性反馈控制系统的综合

控制系统的综合是指对于给定的受控对象，根据规定的性能指标，确定出系统的控制结构，寻找出控制的策略（控制器的型式和参数），使系统的控制过程能满足生产工艺所规定的性能指标要求。

在现代控制理论中，由于采用了状态空间来描述系统，所以，在综合系统时，除了采用输出反馈方式外，更多的是采用状态变量进行反馈。

本章主要介绍现代控制理论基础中在综合系统时通常采用的一些基本结构，讨论综合问题中有关的极点配置、状态观测、镇定和解耦等问题。

7.1 状态反馈与输出反馈

在经典控制理论中，利用系统的输出进行反馈，构成输出负反馈系统，可以得到较满意的系统性能；减小干扰对系统的影响；减小被控对象参数变化对系统性能的影响。因此，输出反馈控制得到了广泛的应用。在现代控制理论中，为了达到希望的控制要求，也采用反馈控制方法来构成反馈系统。这里采用的反馈控制有状态反馈和输出反馈两种。

7.1.1 状态反馈

线性定常系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (7.1.1)$$

其中状态 x ，输入 u 和输出 y 分别为 n 、 r 、 m 维向量。 A 、 B 、 C 、 D 为满足矩阵运算的矩阵。假定有可能设置 n 个传感器，使全部状态变量均可用于反馈。其反馈控制律为

$$u = v - Kx \quad (7.1.2)$$

其中， K 为 $r \times n$ 型反馈增益矩阵； v 为 r 维输入向量。构成的状态反馈系统如图 7.1 所示。状态反馈系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(V - Kx) = (A - BK)x + Bv \\ y &= (C - DK)x + Dv\end{aligned}\quad (7.1.3)$$

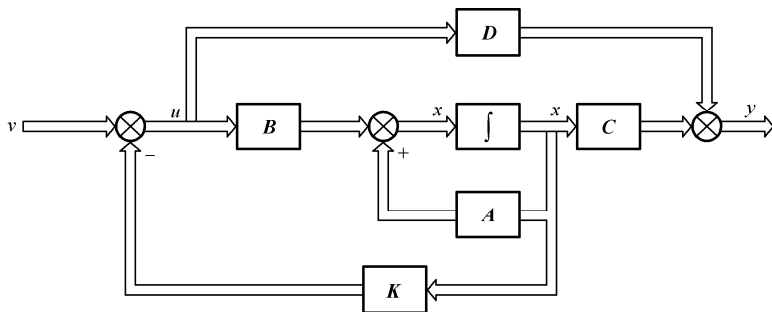


图 7.1 状态反馈系统

由方程 (7.1.3) 可知:

- (1) 状态反馈不增加新的状态变量;
- (2) 状态反馈对输入矩阵 B 和直接传输矩阵 D 无影响;
- (3) 系统的系数矩阵由 A 变成 $A-BK$;
- (4) 输出矩阵由 C 变成 $C-DK$ 。

系统的瞬态性能主要由系数矩阵决定。 A 、 B 阵是已知的, 不能改变。 K 阵可以在一个很宽的范围内选择。因此, 通过适当的方法选择反馈阵 K , 就可以使系统达到希望的控制目的。

7.1.2 输出反馈

把系统的输出变量按照一定的比例关系反馈到系统的输入端或状态微分端称为输出反馈。由于状态变量不一定具有物理意义, 所以状态反馈往往不易实现。而输出变量则有明显的物理意义, 因而输出反馈易实现。

对于式 (7.1.1) 描述的线性系统, 当将系统的控制量 u 取为输出 y 的线性函数

$$u = v + \tilde{K}y \quad (7.1.4)$$

时, 称之为输出反馈, 其中 v 为 m 维参考输入向量, \tilde{K} 为 $m \times p$ 矩阵, 称为输出反馈增益矩阵。

将式 (7.1.4) 代入式 (7.1.1), 可得到采用输出反馈后闭环系统的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B\tilde{K}C)x + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

输出反馈至参考输入的系统结构图如图 7.2 所示。比较式 (7.1.1) 和式 (7.1.5) 可见输出反馈前后的系统特征方程分别为 $\det[\lambda I - A]$ 和 $\det[\lambda I - (A + B\tilde{K}C)]$, 从而可见输出反馈后的系统极点与输出反馈矩阵 \tilde{K} 有关。

当我们把图 7.2 输出反馈结构图中的 B 矩阵移到第一个相加点之前时, 就是输出变量反馈到 \dot{x} 端的情况, 如图 7.3 所示。

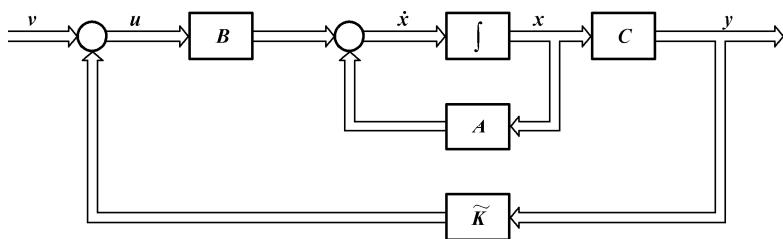


图 7.2 输出反馈至参考输入结构图

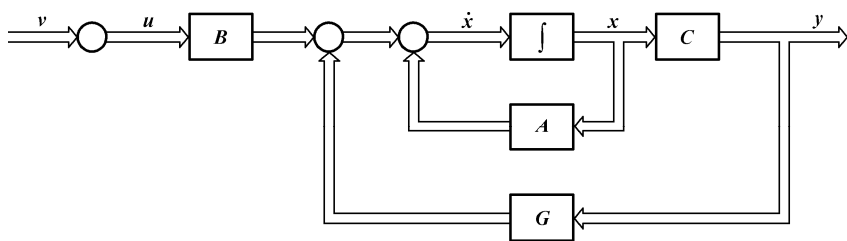


图 7.3 输出反馈至状态结构图

此时, 系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{GC})\mathbf{x} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\quad (7.1.6)$$

式中, \mathbf{G} 为 $n \times p$ 矩阵, 也称为输出反馈增益矩阵。输出反馈不改变系统的能观性。

状态反馈和输出反馈(主要指输出反馈至 $\dot{\mathbf{x}}$ 的情况)都能够对系统进行极点配置, 且一般经验认为, 用简单的比例反馈(即 \mathbf{K} , $\tilde{\mathbf{K}}$ 或 \mathbf{G} 为常数矩阵)就能使问题得到解决。

7.2 反馈控制对能控性与能观测性的影响

上述两种反馈控制, 其闭环系统的能控性和能观测性相对于原受控系统来说, 是否发生变化, 是关系到能否实现状态控制和状态观测的重要问题。

定理 7.1 状态反馈不改变受控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的能控性, 但却不一定保持系统的能观测性。

证明: 因为原受控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的能控性矩阵为

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

而状态反馈闭环系统 Σ_K 的能控性矩阵为

$$[\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}]$$

由于 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} = \mathbf{AB} - \mathbf{B}(\mathbf{KB})$, 这表明 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B}$ 的列向量可以由 $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]$ 的列向量的线性组合来表示。 $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^2\mathbf{B}$ 的列向量可以由 $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ 的列向量的线性组合来表示。其余类推, 于是 $[\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}]$ 的列向量可以由 $[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 的列向量的线性组合来表示。因此有

$$\text{rank}[\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}] \leq \text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

而受控系统又可认为是系统 $\Sigma_K[(\mathbf{A} - \mathbf{BK}), \mathbf{B}, \mathbf{C}]$ 通过 \mathbf{K} 阵正反馈构成的状态反馈系统, 于是有

$$\begin{aligned}\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \\ \leq \text{rank}[\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}]\end{aligned}$$

要使两不等式同时成立, 只能是

$$\begin{aligned}\text{rank}[\mathbf{B} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B} \quad \cdots \quad (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}] \\ = \text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\end{aligned}$$

所以状态反馈前后系统的能控性不变。关于状态反馈不保持原受控制系统的能观测性问题将在后文中加以说明。

定理 7.2 输出反馈系统不改变原受控系统 Σ_0 的能控性和能观测性。

证明: 因为输出反馈是状态反馈的一种特殊情况, 因此输出反馈和状态反馈一样, 也保持了受控制系统的能控性不变。

关于能观测性不变, 可由输出反馈前后两系统的能观测矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} C \\ C(A+B\tilde{K}C) \\ \vdots \\ C(A+B\tilde{K}C)^{n-1} \end{bmatrix}$$

来证明。仿照定理 7.1 的证明方法, 可以证明上述两能观测性矩阵的秩相等, 因此输出反馈保持原受控系统的能观测性不变。

例 7.2.1 设系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= [1 \quad 2] \mathbf{x} \end{aligned}$$

试分析系统引入状态反馈 $\mathbf{K}=[3 \quad 1]$ 后的能控性和能观测性。

解: 容易判断原系统是能控且能观测的。引入 $\mathbf{K}=[3 \quad 1]$ 后, 闭环系统 Σ_K 的状态空间表达式由式 (7.1.3) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ \mathbf{y} &= [1 \quad 2] \mathbf{x} \end{aligned}$$

不难判断, 系统 Σ_K 是能控的, 但不是能观测的。可见引入状态反馈 $\mathbf{K}=[3 \quad 1]$ 后, 闭环系统保持了能控性不变, 而不能保持能观测性。

7.3 闭环系统极点配置

控制系统的性能主要取决于系统极点在根平面上的分布。因此, 在系统设计中, 通常是根据对系统的品质要求, 规定闭环系统极点应有的分布情况。所谓极点配置, 就是通过选择反馈矩阵 \mathbf{K} , 将闭环系统的极点恰好配置在根平面上所期望的位置, 以获得所希望的动态性能。

定理 7.3 设给定系统 Σ 的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

通过状态反馈 $u = v - \mathbf{K}\mathbf{x}$ 能使其闭环极点位于预先任意指定位置上的充分必要条件是系统 Σ 为完全能控的。

证明 为叙述简单, 这里仅就单变量系统的情况证明。

充分性: (1) 若 Σ_0 完全能控, 必存在非奇异线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$ 能将系统 Σ_0 化成能控标准型

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = [c_n \quad c_{n-1} \quad \dots \quad c_1]$$

受控系统 Σ_0 的传递函数为

$$W_0(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s + c_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

因为线性变换不改变系统的特征值，故系统 Σ_0 的特征多项式为

$$f(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

(2) 引入状态反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}}$$

式中

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \dots \quad \tilde{k}_n]$$

将上式代入式 (7.3.1)。可求得对 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的闭环状态空间表达式为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}$$

式中

$$(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_n + \tilde{k}_1) & -(a_{n-1} + \tilde{k}_2) & \dots & -(a_1 + \tilde{k}_n) \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$f(a_n + \tilde{k}_1) = |s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}})| = s^n + (a_1 + \tilde{k}_n)s^{n-1} + \dots + (a_n + \tilde{k}_1) \quad (7.3.2)$$

闭环传递函数为

$$\begin{aligned} W_R(s) &= \tilde{\mathbf{C}}[s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}})]^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \\ &= \frac{c_1 s^{n-1} + \dots + c_{n-1}s + c_n}{s^n + (a_1 + \tilde{k}_n)s^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + \tilde{k}_2)s + (a_n + \tilde{k}_1)} \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

(3) 根据给定的 n 个希望闭环极点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，可求得期望的闭环特征方程为

$$\begin{aligned} f^*(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) \\ &= s^n + a_1^* s^{n-1} + \dots + a_n^* \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

比较式 (7.3.2) 和式 (7.3.4) 的同次幂的系数，可得

$$\begin{aligned} a_1 + \tilde{k}_n &= a_1^* \\ a_2 + \tilde{k}_{n-1} &= a_2^* \\ &\vdots \\ a_n + \tilde{k}_1 &= a_n^* \end{aligned}$$

从而得

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2 \quad \dots \quad \tilde{k}_n] = [a_n^* - a_n \quad a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \dots \quad a_1^* - a_1] \quad (7.3.5)$$

(4) 根据状态反馈控制律在等价变换前后的表达式

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}$$

和

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}}$$

可得到原系统 Σ_0 的状态反馈 \mathbf{K} 的表达式为

$$K = \tilde{K}P \quad (7.3.6)$$

将

$$P = \begin{bmatrix} P_c \\ P_c A \\ \vdots \\ P_c A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad P_1 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1}$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} K &= [a_n^* - a_n \quad a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1^* - a_1] \begin{bmatrix} P_c \\ P_c A \\ \vdots \\ P_c A^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= P_c [a_n^* I + a_{n-1}^* A + \cdots + a_1^* A^{n-1}] - P_c [a_n I + a_{n-1} A + \cdots + a_1 A^{n-1}] \\ &= P_c [a_n^* I + a_{n-1}^* A + \cdots + a_1^* A^{n-1} + A^n] \\ &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] U_0^{-1} f^*(A) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} K &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] U_0^{-1} f^*(A) \\ &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1} f^*(A) \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

式中

$$f^*(A) = a_n^* + a_{n-1}^* A + \cdots + a_1^* A^{n-1} + A^n$$

是将式 (7.3.4) 中 s 换成系统矩阵 A 的矩阵多项式。

必要性: 即系统 Σ_0 可任意配置极点, 需证系统 Σ_0 为完全能控。

采用反证法, 即假设系统 Σ_0 可任意配置极点, 但系统 Σ_0 为不完全能控。

因系统 Σ_0 为不完全能控, 故必可采用非奇异线性变换, 将系统分解为能控和不能控两部分。即

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \tilde{x} \end{aligned}$$

引入状态反馈

$$u = r - \tilde{K} \tilde{x}$$

式中

$$\tilde{K} = [\tilde{K}_c \quad \tilde{K}_{\bar{c}}]$$

系统变为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 - \tilde{b}_1 \tilde{K}_c & \tilde{A}_{12} - \tilde{b}_1 \tilde{K}_{\bar{c}} \\ 0 & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2] \tilde{x} \end{aligned}$$

相应的特征多项式为

$$|sI - (\tilde{A} - \bar{B}\tilde{K})| = \begin{vmatrix} sI - (\tilde{A}_1 - \bar{B}_1\tilde{K}_r) & -(\tilde{A}_{12} - \bar{B}_1\tilde{K}_c) \\ 0 & sI - \tilde{A}_c \end{vmatrix} \\ = |sI - (\tilde{A}_1 - \bar{B}_1\tilde{K}_r)| |sI - \tilde{A}_c|$$

由此可见, 利用状态反馈只能改变系统能控部分的极点。而不能改变不能控部分的极点。也就是说, 在此种情况下, 不可能任意配置系统的全部极点, 这与假设相矛盾, 于是系统是完全能控的。必要性得证。

上述原理同样适用于多变量系统, 但具体设计要困难得多。因为将综合指标化为期望极点需要凭借工程处理。其次, 把受控系统化为能控标准型亦相当麻烦, 而且状态反馈阵 K 的解也非唯一。此外, 还可能改变系统零点的形态等。

在以上充分性的证明过程中, 实际上已经给出了求取状态反馈阵 K 的方法, 称为爱克曼公式法。

另外两种求取 K 的方法如下:

1. 非奇异变换法

(1) 求 A 的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

(2) 求闭环系统的期望特征多项式

$$(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) \cdots (s - \lambda_n^*) = s^n + a_1^*s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^*s + a_n^*$$

(3) 计算

$$\tilde{K} = [a_n^* - a_n \quad a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1^* - a_1]$$

(4) 计算

$$Q = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

(5) 令 $P = Q^{-1}$

(6) 求 $K = \tilde{K}P$

例 7.3.1 已知单输入线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈向量 K , 使系统的闭环特征值为

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 + j, \quad \lambda_3 = -1 - j$$

解 系统的可控性判别矩阵为

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } Q_c = 3 = n$$

系统可控, 满足可配置条件, 系统的特征多项式为

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{bmatrix} = s^3 + 18s^2 + 72s$$

希望的特征多项式为

$$\begin{aligned} a^*(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = (s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j) \\ &= s^3 + 4s^2 + 6s + 4 \end{aligned}$$

于是可求得

$$\bar{\mathbf{K}} = [a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad a_2^* - a_2] = [4 \quad -66 \quad -14]$$

变换矩阵为

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 18 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \bar{\mathbf{K}}\mathbf{P} = [4 \quad -66 \quad -14] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix} \\ &= [-14 \quad 186 \quad -1220] \end{aligned}$$

2. 直接法

直接求解法是通过使状态反馈闭环系统的特征多项式和期望的特征多项式相等，直接求解状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 。本方法适用于手工求解维数较低 ($n \leq 3$) 的系统。直接求解法的步骤如下：

① 判断系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的能控性。如果状态完全能控，则极点可以任意配置，按下列步骤继续。

② 求状态反馈闭环系统的特征多项式。

$$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})|$$

③ 根据给定（或由瞬态性能指标等求得）的期望闭环极点，写出期望的特征多项式。

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*)$$

④ 由 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$ ，求出状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} 。

同一例题

设： $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

$$\begin{aligned} a^*(s) &= \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] = \det \begin{bmatrix} s+k_1 & k_2 & k_3 \\ -1 & s+6 & 0 \\ 0 & -1 & s+12 \end{bmatrix} \\ &= s^3 + (k_1 + 18)s^2 + (18k_1 + k_2 + 72)s + (72k_1 + 12k_2 + k_3) \end{aligned}$$

与希望的特征多项式对应系数相等，于是

$$k_1 + 18 = 4$$

$$18k_1 + k_2 + 72 = 6$$

$$\begin{aligned}
72k_1 + 12k_2 + k_3 &= 4 \\
k_1 &= -14, \quad k_2 = 186, \quad k_3 = -1220 \\
\mathbf{K} &= [-14 \quad 186 \quad -1220]
\end{aligned}$$

根据上述过程，做如下讨论：

(1) 状态反馈不改变系统的维数，即经状态反馈后的闭环系统 Σ_K ，其维数等于原系统 Σ 的维数。但是闭环传递函数的阶次可能会降低，这是由分子分母的公因子被对消所致。

(2) 对于单输入单输出系统，状态反馈不会移动系统传递函数的零点。

(3) 上述性质可用来解释为什么状态反馈可能改变系统的能观测性。若某些极点被移动到与 $W(s)$ 的零点相重合的位置，将出现零极点的对消，所以系统是不完全能观测的。

7.4 采用状态观测器的状态反馈系统

利用状态反馈能够任意配置一个能控系统的闭环极点，从而有效地改善控制系统的性能。现代控制理论中按各种最优准则建立起来的最优控制系统，以及本章所介绍的极点配置、解耦控制等，都离不开状态反馈。然而，或者由于不易直接测量，或者由于测量设备在经济性和使用性上的限制，使得常常不可能实际获得系统的全部状态变量，从而使得状态反馈的物理实现遇到困难。克服这种困难的途径之一就是重构系统的状态，并用这个重构的状态去代替系统的真实状态实现所需的状态反馈。这个用以实现重构状态的新系统称为状态观测器。

7.4.1 状态重构问题

设线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

将输出方程对 t 逐次求导，代入状态方程并整理可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\
\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}\mathbf{B}u &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} \\
\ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{u} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}u &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x} \\
&\vdots \\
\mathbf{y}^{(n-1)} - \mathbf{C}\mathbf{B}u^{(n-2)} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}u^{(n-3)} - \dots - \mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-2)}\mathbf{B}u &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{B}u \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} - \mathbf{C}\mathbf{B}u^{(n-2)} - \dots - \mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-2)}\mathbf{B}u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{V}_0 \mathbf{x}$$

若系统完全能观测，即 $\text{rank } \mathbf{V}_0 = n$ ，则 \mathbf{V}_0 的逆 \mathbf{V}_0^{-1} 一定存在，上式中的 \mathbf{x} 才能有唯一解。即只有当系统是状态完全能观测时，其状态向量可以由它的输入输出以及输入输出的各阶导数的线性组合构造出来。

7.4.2 状态观测器的存在条件

定理 7.4 给定 n 维线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (7.4.2)$$

其中 \mathbf{x} 为 n 维状态向量, \mathbf{u} 为 p 维输入向量, \mathbf{y} 为 q 维输出向量, 矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 为具有相应维数的实常量矩阵。若此系统是状态完全能观测的, 则状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 可以由输入 \mathbf{u} 和输出 \mathbf{y} 的相应信息构造出来。

解决系统状态重构的一个直观想法是构造一个系统, 该系统的输入为式 (7.4.2) 的系统的输入 $\mathbf{u}(t)$; 系统的结构、参数与式 (7.4.2) 的系统相同。于是得到如下的系统方程

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (7.4.3)$$

将方程中的 $\hat{\mathbf{x}}$ 作为式 (7.4.2) 系统状态的重构状态。

式 (7.4.2) 减去式 (7.4.3), 得到

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\quad (7.4.4)$$

如果系统的初始状态 $\mathbf{x}(0)=\hat{\mathbf{x}}(0)$, 即 $\mathbf{x}(0)-\hat{\mathbf{x}}(0)=\mathbf{0}$, 根据解的唯一性, 有 $\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$, 即 $\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}$, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 为式 (7.4.2) 的系统重构状态。式 (7.4.3) 就称为系统的开环状态观测器。实际上, 这是很难做到的。原因是两个系统的初始状态总有差异, 即 $\mathbf{x}(0)\neq\hat{\mathbf{x}}(0)$; 系统的矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 的元素可能是变化的, 而式 (7.4.3) 的矩阵一旦决定后是不改变的。这样两者就可能有差异, 此外系统还存在噪声等。考虑上述诸因素, $\mathbf{x}\neq\hat{\mathbf{x}}$ 。因此, 这种方法重构的状态变量是不能用的。怎么办呢? 既然 \mathbf{x} 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 不等, 则 $(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})$ 亦不为零。而 \mathbf{y} 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 是可以测量得到的, 于是是一个很自然的想法是引入信号 $(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})$ 来校正式 (7.4.3), 即

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y}\end{aligned}\quad (7.4.5)$$

其中, \mathbf{L} 为 $n\times m$ 型矩阵。式 (7.4.5) 所对应的状态图如图 7.4 所示。

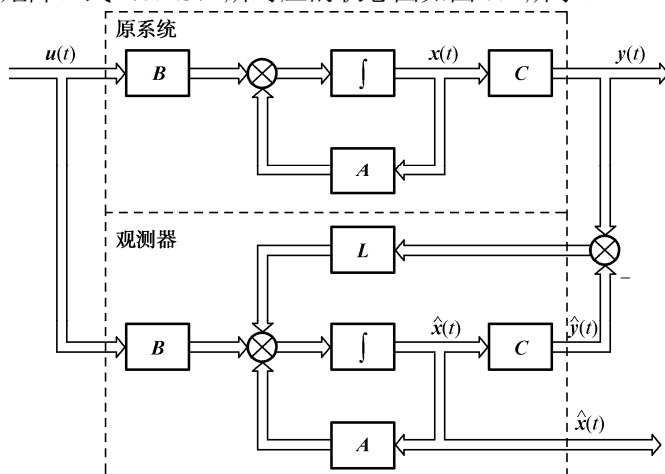


图 7.4 多变量系统的状态观测器

式 (7.4.2) 减去式 (7.4.5), 得到

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - [(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{y}] \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\quad (7.4.6)$$

由式 (7.4.6) 知, 如果适当地选择 \mathbf{L} 阵, 使 $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ 的所有特征值具有负实部, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (7.4.7)$$

式 (7.4.6) 就是式 (7.4.2) 的系统状态观测器, $\hat{\mathbf{x}}$ 就是重构状态。

通过上述讨论可知, 实现系统状态的重构, 关键在于 \mathbf{L} 阵的存在和适当的选择。这就是状态观测器存在的条件, 关于这个问题, 有定理 7.5。

定理 7.5 系统的状态观测器存在的充分必要条件是系统能观测或者系统虽不能观测但其不能观测的子系统的特征值具有负实部。

观测器存在的充分条件为线性定常系统是完全能观测的; 观测器存在的充要条件为线性定常系统的不能观测部分是渐近稳定的。

7.4.3 状态观测器的设计

由图 7.4 可得观测器的状态方程

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u - \mathbf{L}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y$$

即

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y \quad (7.4.8)$$

其特征多项式为

$$f(s) = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})| \quad (7.4.9)$$

由于在工程上要求 $\hat{\mathbf{x}}$ 能比较快地逼近 \mathbf{x} , 只要调整反馈阵 \mathbf{L} , 观测器的极点就可以任意配置达到要求的性能。所以, 观测器的设计与状态反馈极点配置的设计类似。

下面利用对偶原理根据求状态反馈阵 \mathbf{K} 的方法来确定反馈阵 \mathbf{L} 的值。

若系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

是完全能观测的, 那么它的对偶系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{C}^T \eta \\ \mathbf{w} &= \mathbf{B}^T \mathbf{z} \end{aligned}$$

便是完全能控的, 这时采用状态反馈阵 \mathbf{L}^T , 有

$$\eta = \mathbf{r} - \mathbf{L}^T \mathbf{z}$$

闭环后的状态方程是

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T) \mathbf{z} + \mathbf{C}^T \mathbf{r}$$

根据式 (7.3.7), 可得反馈阵 \mathbf{L}^T 的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \mathbf{U}_0^{-1} f_0^*(\mathbf{A}^T) \\ &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]^{-1} f_0^*(\mathbf{A}^T) \end{aligned}$$

由上面类比, 可得观测器的反馈阵 \mathbf{L} 为

$$\mathbf{L} = f_0^*(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = f_0^*(\mathbf{A}) \mathbf{U}_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.4.10)$$

式中, $f_0^*(\mathbf{A})$ 将期望的特征多项式 $f_0^*(s)$ 中的 s 换成 \mathbf{A} 后的矩阵多项式。

另一种比较实用的求 \mathbf{L} 的方法是根据观测器的特征多项式

$$f_0(\mathbf{A} - \mathbf{LC}) = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})|$$

和期望的特征多项式

$$f_0^*(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$$

使其 s 多项式对应项的系数相等, 得到 n 个代数方程, 即可求出反馈阵

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

极点配置中的非奇异变换法同样可以求取 \mathbf{L} , 下面以例题的形式进行说明。

例 7.4.1 给定系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

为其设计一全维状态观测器, 并使观测器的极点为 $\lambda_1^* = -5$, $\lambda_{2,3}^* = -4 \pm j4$ 。

解 因为所给系统是状态完全能观测的, 所以可以构造能任意配置特征值的全维状态观测器。

(1) 由 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 2s^2 + s$, 得 $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$;

(2) 由观测器的期望特征值, 可求得观测器的期望特征多项式为

$$(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*)(s - \lambda_3^*) = (s + 5)(s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^3 + 13s^2 + 72s + 160$$

得

$$a_1^* = 13, \quad a_2^* = 72, \quad a_3^* = 160$$

(3) $\tilde{\mathbf{L}}^T = [a_3^* - a_3 \quad a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1] = [160 \quad 71 \quad 11]$;

$$(4) \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T] \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad \mathbf{L}^T = \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{P} = [160 \quad 71 \quad 11] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [80 \quad -20 \quad 31], \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 80 \\ -20 \\ 31 \end{bmatrix}$$

于是全维状态观测器的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ly} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 80 \\ -20 \\ 31 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 1] \right\} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 80 \\ -20 \\ 31 \end{bmatrix} \mathbf{y} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -80 & -80 \\ 1 & 19 & 20 \\ 0 & -30 & -32 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 80 \\ -20 \\ 31 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

经验证，上述状态观测器的特征值的确为 $\lambda_1^* = -5$ ， $\lambda_{2,3}^* = -4 \pm j4$ 。

全维状态观测器的维数等于原给定系统的维数，观测器输出 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{A}-\mathbf{LC})$ 包含有与 $\mathbf{x}(t)$ 相同的状态变量个数。实际上，系统的输出 $\mathbf{y}(t)$ 是能够测量的，很明显，倘若利用输出的 q 个分量直接产生 q 个状态变量，其余的 $n-q$ 个由观测器来估计出，这样，观测器的维数就必然可以降低。我们把具有这种工作机制的观测器称为降维状态观测器（有的文献也称它为最小维状态观测器）。下面对这种观测器的设计作简要介绍。

设受控系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

是完全能观测的，并且 \mathbf{x} 是 n 维的， \mathbf{y} 是 q 维的。为把 \mathbf{x} 分解为 $\tilde{\mathbf{x}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_2$ 两部分，其中 $\tilde{\mathbf{x}}_2$ 是 q 个直接由输出测得的状态变量，为此引入下列线性变换，即令

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}} \quad (7.4.12)$$

式中

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (7.4.13)$$

\mathbf{C} 为受控系统的输出矩阵，是 $q \times n$ 阶矩阵。 \mathbf{D} 为 $(n-q) \times n$ 阶，并保证使 \mathbf{Q}^{-1} 为非奇异的任意矩阵。则变换后受控系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

由下列恒等式

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \tilde{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad \mathbf{I}] \times \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

得

$$\tilde{\mathbf{C}} = [0 \quad \mathbf{I}] \quad (7.4.16)$$

故

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (7.4.17)$$

经过非奇异变换后的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (7.4.18)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [0_{n-m} \quad \mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \quad (7.4.19)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}_2$ 可以通过输出进行测量, 所以只需要设计 $n-m$ 维观测器来估计状态向量 $\tilde{\mathbf{x}}_1$ 。

由式 (7.4.18) 和式 (7.4.19), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 &= \tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 &= \tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

将 $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}}_2$ 代入式 (7.4.20) 得

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} \quad (7.4.21)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \dot{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u} \end{aligned}$$

则得到以 $n-m$ 维向量 $\tilde{\mathbf{x}}_1$ 为状态向量, 以 \mathbf{z} 为输出的状态空间描述:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 &= \tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{v} \\ \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1 \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

由于原系统状态完全能观测, 同时线性非奇异变换不改变系统的能观测性, 所以式 (7.4.22) 所示系统状态完全能观测, 下面对该 $n-m$ 维子系统设计全维状态观测器。

该 $n-m$ 维子系统的全维状态观测器的结构图如图 7.5 所示。

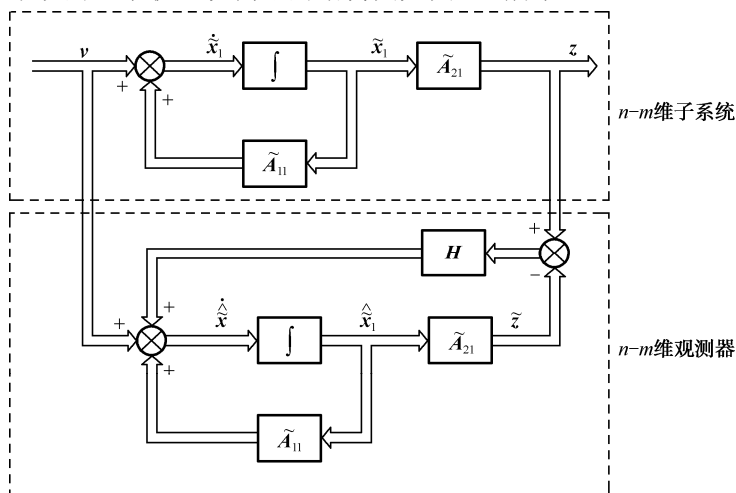


图 7.5 $n-m$ 维子系统的全维观测器结构图

图中 \mathbf{H} 为 $(n-m) \times m$ 维增益矩阵, 由图 7.5 可以得到 $n-m$ 维观测器的状态方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{v} + \mathbf{H}\mathbf{z} \quad (7.4.23)$$

将式 (7.4.20) 和式 (7.4.21) 代入式 (7.4.23) 中, 消掉 \mathbf{v} 和 \mathbf{z} , 可得

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{x}}_1 + (\tilde{\mathbf{A}}_{12}\tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}) + \mathbf{H}(\dot{\tilde{\mathbf{y}}} - \tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{B}}_2\mathbf{u})$$

由上式可知, $n-m$ 维观测器的特征方程为

$$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})|$$

状态估计误差的微分方程为

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})(\tilde{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1) = (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})\mathbf{e}$$

所以, 只要合理选择增益矩阵 \mathbf{H} , 就可以任意配置 $n-m$ 维观测器的极点, 从而使误差具有满

意的衰减速度。

式 (7.4.23) 中含有 $\dot{\tilde{y}}$ 的导数项, 需要消去。为此, 选择观测器的状态向量为 w , 且

$$w = \hat{\tilde{x}}_1 - H\tilde{y} \quad (7.4.24)$$

对上式两边求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{\hat{\tilde{x}}_1} - H\dot{\tilde{y}} \\ &= (\tilde{A}_{11} - H\tilde{A}_{21})w + [(\tilde{A}_{11} - H\tilde{A}_{21})H + (\tilde{A}_{12} - H\tilde{A}_{22})]\tilde{y} + (\tilde{B}_1 - H\tilde{B}_2)u \end{aligned} \quad (7.4.25)$$

由式 (7.4.24) 可得

$$\hat{\tilde{x}}_1 = w + H\tilde{y}$$

其中, $\hat{\tilde{x}}_1$ 是由观测器重构的状态向量。

所以, 整个系统的估计状态为

$$\hat{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + H\tilde{y} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} H \\ I_m \end{bmatrix} \tilde{y}$$

所以, 原系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 下的估计状态为 $\hat{x} = Q\hat{\tilde{x}}$ 。

$n-m$ 维观测器的结构如图 7.6 所示。

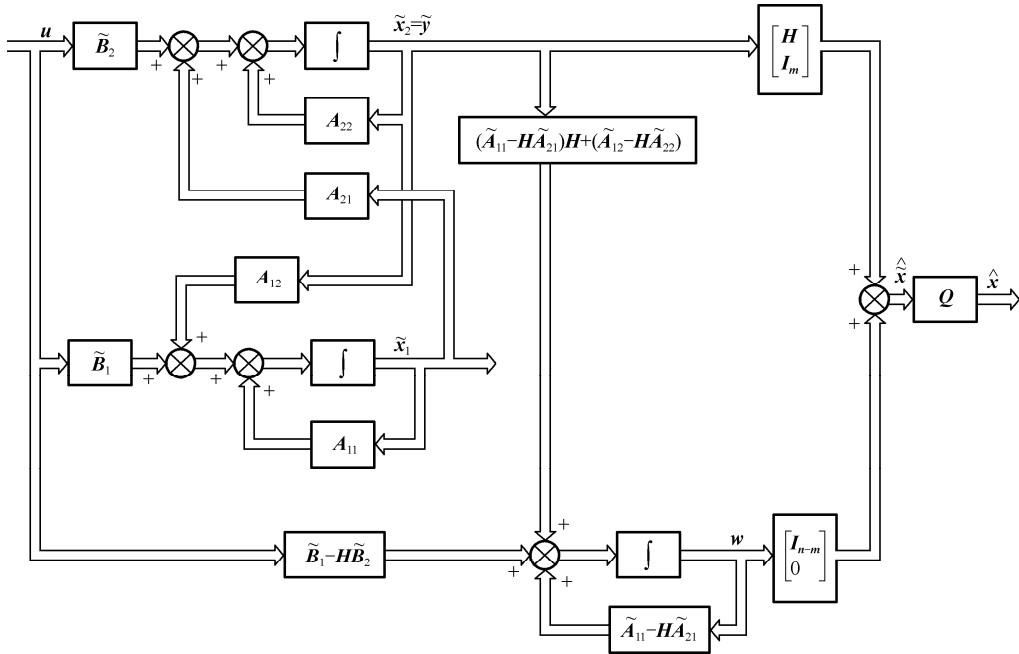


图 7.6 $n-m$ 维观测器结构图

由以上 $n-m$ 维观测器的设计方法可以归纳出降维观测器的设计步骤:

- (1) 判断系统的状态能观测性, 状态能观测则继续以下步骤;
- (2) 求非奇异变换阵 Q , 对系统进行结构分解;
- (3) 确定降维观测器的期望多项式 $f^*(\lambda)$;
- (4) 求降维观测器的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - (\tilde{A}_{11} - H\tilde{A}_{21})|$;
- (5) 由 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 求出增益矩阵 H ;

(6) 由式 (7.4.25) 设计降维状态观测器

$$\dot{\mathbf{w}} = (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})\mathbf{w} + [(\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})\mathbf{H} + (\tilde{\mathbf{A}}_{12} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{22})]\tilde{\mathbf{y}} + (\tilde{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}$$

则整个系统的估计状态为

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$$

原系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 下的估计状态为 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\hat{\tilde{\mathbf{x}}}$ 。

例 7.4.2 为例 7.4.1 所示系统设计一降维状态观测器，并使该观测器的特征值为 $\lambda_{1,2} = -4 + j4$ 。

解 构造等价变换矩阵 \mathbf{Q} ，并将给定系统的状态空间表达式作相应的等价变换，有

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1 \mid \mathbf{Q}_2]$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \mid 1]$$

即有

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{A}}_{21} = [1 \quad 1], \tilde{\mathbf{A}}_{22} = 1, \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_2 = 0$$

降维观测器的期望特征多项式 $a(s)$ 为

$$a(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 4 - j4)(s + 4 + j4) = s^2 + 8s + 12$$

设 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ ，则有

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} [1 \quad 1] \right\} = \begin{bmatrix} -h_1 & -h_1 \\ 1-h_2 & -1-h_2 \end{bmatrix}$$

于是

$$\det[s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{A}}_{21})] = \det \begin{bmatrix} s+h_1 & h_1 \\ h_2-1 & s+1+h_2 \end{bmatrix} = s^2 + (1+h_1+h_2)s + 2h_1$$

比较上面两个多项式，得 $h_1 = 16$ ， $h_2 = -9$ 。这样，根据式 (7.4.25) 可得降维观测器的方程为

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} -16 & -16 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -96 \\ 79 \end{bmatrix} \tilde{y}$$

$$\hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} I & H \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \quad \hat{x} = Q\hat{\hat{x}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$$

7.5 带有状态观测器的状态反馈系统

系统的空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

当系统能控时，引入状态反馈构成状态反馈系统，可以任意配置状态反馈系统的特征值；如果系统的状态不能测得，只要系统能观测，可以采用状态观测器实现状态重构。用这个重构的状态是否可以代替真实状态进行反馈，即构成带状态观测器的状态反馈系统？回答是肯定的。不过要搞清楚两个问题：

(1) 本章第 1 节的状态反馈阵 K 是针对真实状态 x 计算的，当采用 \hat{x} 代替 x 时，为了保持状态反馈系统所希望的特征值， K 阵是否要重新计算？

(2) 状态观测器是单独设计的，当它作为带状态观测器的状态反馈系统的一部分时，状态观测器的特征值是否会发生变化？ L 阵是否要重新计算？

现在就来研究这两个问题。假设采用全维状态观测器。

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (7.5.2)$$

状态反馈为

$$u = v - K\hat{x} \quad (7.5.3)$$

带状态观测器的状态反馈系统是一个组合系统，如图 7.7 所示，其方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} &= LCx + (A - LC - BK)\hat{x} + Bv \\ y &= Cx \end{aligned}$$

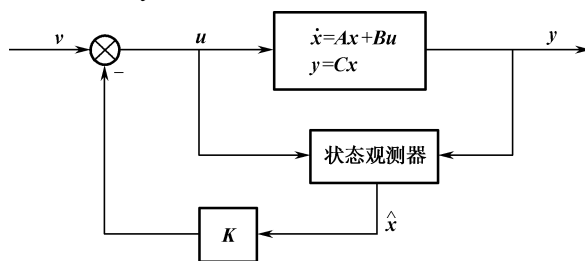


图 7.7 带状态观测器的状态反馈系统

记成向量、矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (7.5.4)$$

我们可以对带状态观测器的状态反馈系统的特征值进行分析。不过求式 (7.5.4) 的特征值很繁琐。为此作如下线性变换。其变换矩阵为 P

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

而

$$P \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \bar{x} \end{bmatrix} \quad (7.5.5)$$

其中 \bar{x} 为估计误差, I 为 n 维单位阵 (n 为原系统维数)。

对式 (7.5.4) 进行线性变换, 得到如下形式的方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} V \\ &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} V \\ y &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

可见, 经过线性变换后的带状态观测器的状态反馈系统的特征多项式为

$$\det \begin{bmatrix} sI - A + BK & BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} = \det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC) \quad (7.5.7)$$

令上式等于零即得到带状态观测器的状态反馈系统的特征值。很显然, 特征值为采用真实状态反馈的状态反馈系统特征值, 加上状态观测器的特征值。这个结果表明, 采用估计状态 \hat{x} 代替真实状态 x 进行反馈时, 反馈阵 K 不改变; 状态观测器作为系统一个组成部分时, L 阵也不改变。不仅如此, 若系统 (7.5.1) 能控, 则 $A-BK$ 的特征值可以任意配置, 不受状态观测器的影响; 若系统 (7.5.1) 能观测, 则 $A-LC$ 的特征值也可以任意配置, 不受状态反馈的影响。这种 $A-BK$ 的特征值和 $A-LC$ 的特征值可以分别配置, 互不影响的方法称为分离原理。这里应说明的是, 系统设计时, 状态观测器的特征值大约是状态反馈系统特征值的 4 倍, 从而保证状态观测器有快的瞬态过程。

上面讨论的状态观测器是全维的情况, 采用降维观测器构成状态反馈系统也是可以的。带状态观测器的状态反馈系统传递函数 $W(s)$ 可由式 (7.5.6) 求出

$$W(s) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = C[sI - A + BK]^{-1} B \quad (7.5.8)$$

带状态观测器的状态反馈系统传递函数与采用真实状态 x 的状态反馈系统传递函数完全一样。

例 7.5.1 设受控系统的传递函数为

$$W_0(s) = \frac{1}{s(s+6)}$$

设计全维状态观测器, 并用状态反馈将闭环极点配置为 $-4 \pm j6$ 。

解: (1) 由传递函数可知, 该系统是能控且能观测的, 因而存在状态观测器并可通过状态反馈实现要求的极点配置。根据分离特性可分别对 L 阵与 K 阵进行设计。

(2) 求状态反馈阵 K 。为方便观测器的设计, 可直接由传递函数写出系统的能控标准型实现, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

令

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

则闭环特征多项式为

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| = s^2 + (6 + k_2)s + k_1$$

而希望的特征多项式为

$$(s + 4 + j6)(s + 4 - j6) = s^2 + 8s + 52$$

令上述两特征多项式相等，得

$$k_1 = 52, \quad k_2 = 2$$

即

$$\mathbf{K} = [52 \quad 2]$$

(3) 设计全维观测器。为使观测器的状态变量 $\hat{\mathbf{x}}$ 能较快地趋向原系统的状态变量 \mathbf{x} ，且又考虑到噪声问题，一般取观测器的极点离虚轴的距离比闭环系统希望极点的位置大 2 倍~3 倍为宜。本例取观测器的极点均为-10。令

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

则观测器的特征多项式为

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})| = s^2 + (6 + l_1)s + 6l_1 + l_2$$

希望的特征多项式为

$$(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

令上述两特征多项式相等，解得 $l_1 = 14$ ， $l_2 = 16$ ，即 $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \end{bmatrix}$ ，所以全维状态观测器方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Ly} + \mathbf{Bu} \\ &= \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

带观测器的状态反馈闭环系统的结构图如图 7.8 所示。

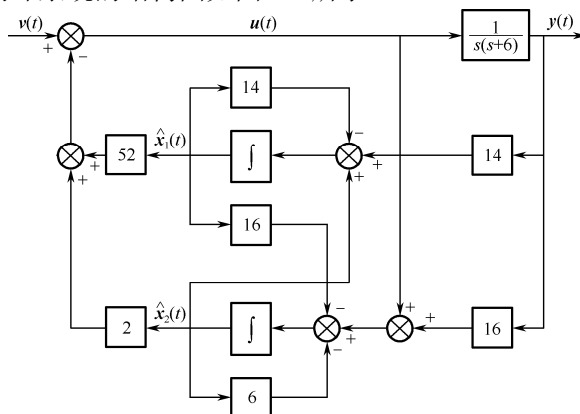


图 7.8 带观测器的状态反馈闭环系统的结构图

7.6 解耦控制

现代化的工业生产装置，往往要求被控制的参数较多，这就要求要设置多个控制回路去控制这些参数。然而，在这些回路间常常相互耦合、相互影响，构成一个互相关联耦合的多变量系统。由于这种互相耦合、影响的结果，通常使系统的性能变差，难以控制，甚至无法正常运行。

解耦控制，简单来说，就是对一个互相关联耦合的受控系统，采用某种方法使其变成“一对一”的控制关系，即一个受控量只受一个控制量控制而与其他控制量无关。目前，实现解耦控制的方法有多种，本节只介绍较常用的两种综合方法，一是串联补偿器方法，二是状态反馈方法。

若一个系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递矩阵 $W(s)$ 是非奇异对角形矩阵，即

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & & & \mathbf{0} \\ & w_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & w_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (7.6.1)$$

则称系统 $\Sigma(A, B, C)$ 是解耦的。

由式 (7.6.1) 可知，此时系统的输出为

$$y(s) = W(s)u(s) = \begin{bmatrix} w_{11}(s) & & & \mathbf{0} \\ & w_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & w_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}$$

整理可得

$$\begin{cases} y_1(s) = w_{11}(s)u_1(s) \\ y_2(s) = w_{22}(s)u_2(s) \\ \vdots \\ y_m(s) = w_{mm}(s)u_m(s) \end{cases} \quad (7.6.2)$$

由此可见，解耦实质上就是实现每一个输入只控制相应的一个输出，也就是一对一控制。通过解耦可将系统分解为多个独立的单输入单输出系统。解耦控制要求原系统输入与输出的维数要相同，反映在传递函数矩阵上就是 $W(s)$ 应是 m 阶方阵。而要求 $W(s)$ 是非奇异的，等价于要求 $w_{11}(s), w_{22}(s), \dots, w_{mm}(s)$ 应均不等于零。否则相应的输出与输入无关。

(1) 串联解耦

所谓串联解耦，就是在原反馈系统的前向通道中串联一个补偿器 $W_c(s)$ ，使闭环传递矩阵 $W_f(s)$ 为要求的对角形矩阵 $W(s)$ ，系统的结构图如图 7.9 所示。

其中， $W_0(s)$ 为受控对象的传递矩阵； H 为输出反馈矩阵； $W_p(s)$ 为前向通道的传递矩阵。

为简单起见，设各传递矩阵的每一个元素均为严格真有理分式。由图 7.9 可得系统的闭环传递矩阵为

$$W_f(s) = [I + W_p(s)H]^{-1}W_p(s) = W(s)$$

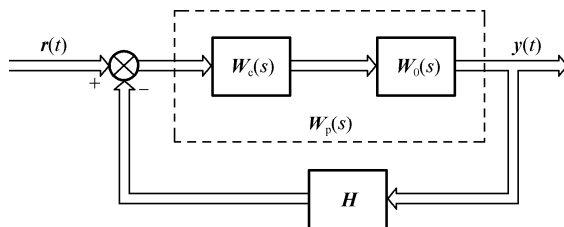


图 7.9 串联解耦系统结构图

所以

$$W_p(s) = W(s)[I - HW(s)]^{-1}$$

而

$$W_p(s) = W_0(s)W_c(s)$$

因此串联补偿器的传递矩阵为

$$W_c(s) = W_0^{-1}(s)W(s)[I - HW(s)]^{-1} \quad (7.6.3)$$

若是单位反馈时, 即 $H=I$, 则

$$W_c(s) = W_0^{-1}(s)W(s)[I - W(s)]^{-1} \quad (7.6.4)$$

一般情况下, 只要 $W_0(s)$ 是非奇异的, 系统就可以通过串联补偿器实现解耦控制。换句话说, $\det W_0(s) \neq 0$ 是通过串联补偿器实现解耦控制的一个充分条件。

由上面分析可归纳出求串联解耦补偿器 $W_c(s)$ 的方法:

- ① 判别受控系统 Σ_0 传递矩阵 $W_0(s)$ 的秩。若满秩, 说明可采用图 7.9 实现串联解耦控制;
- ② 根据性能要求, 给定一个对角线型的闭环传递矩阵 $W(s) = A$;
- ③ 计算 $W_p(s)$;
- ④ 按式 (7.6.3) 求解出串联解耦补偿器 $W_c(s)$ 。

例 7.6.1 设串联解耦系统的结构图如图 7.10 所示, 其中 $H=I$ 。受控对象 $W_0(s)$ 和要求的闭环传递矩阵 $W(s)$ 分别为

$$W_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{2s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

求串联补偿器 $W_c(s)$ 。

解 由式 (7.6.3) 得

$$\begin{aligned} W_c(s) &= W_0^{-1}(s)W(s)[I - W(s)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{2s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -(2s+1) & (2s+1) \\ 2(s+1) & -(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2s+1}{s+1} & \frac{2s+1}{s+4} \\ 2 & -\frac{s+1}{s+4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

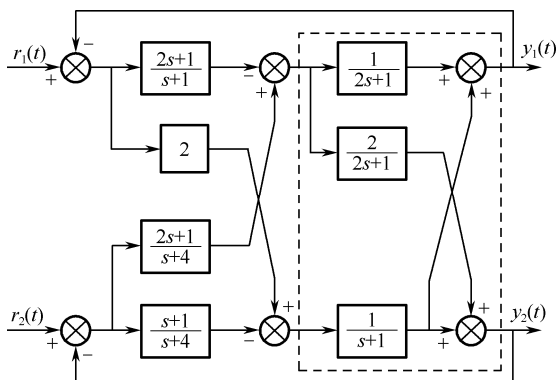


图 7.10 例 7.6.1 串联解耦系统的结构图

(2) 状态反馈解耦

状态反馈解耦系统的结构图如图 7.11 所示。

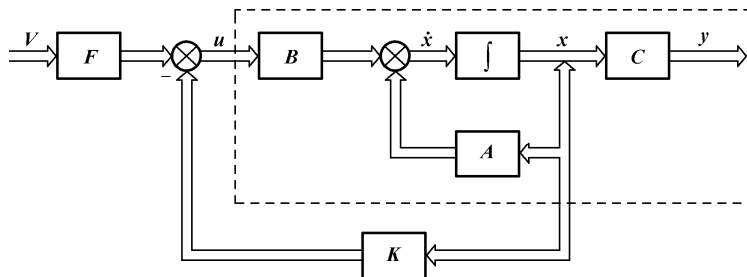


图 7.11 状态反馈解耦系统结构图

图 7.11 中，虚线框内为待解耦的受控系统 $\Sigma_0(A, B, C)$ ，具有能控性。 K 是一个 $m \times n$ 实常数非奇异变换矩阵， F 是一个 $m \times n$ 实常数非奇异变换矩阵， v 是 $m \times 1$ 的输入矢量。

由图 7.11 可写出闭环系统控制律为

$$u = Fv - Kx$$

现在要研究的问题是，如何设计反馈矩阵 K 和变换矩阵 F ，使系统从输入 v 到输出 y 的传递函数阵是解耦的。下面将讨论这个问题，由于证明较复杂，仅介绍其主要的结论和具体的应用。

① 状态反馈解耦中的特征量 d_i 是一个满足不等式

$$c_i A^l B \neq 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, m \quad (7.6.5)$$

的一个最小整数 l 。式中 c_i 是系统输出矩阵 C 中的第 i 行行向量 ($i = 1, 2, \dots, m$)。显然 d_i 中的下标 i 表示行数。

例 7.6.2 已知系统 $\Sigma_0(A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试计算 d_i ($i = 1, 2$)。

解

先算 d_1 。将 $c_1 A^0 B$ 代入式 (7.6.5) 得

$$c_1 A^0 B = c_1 B = [0 \quad 0]$$

$$c_1 A^l B = [1 \quad 0]$$

使 $c_1 A^l B \neq 0$ 的最小 l 是 1, 所以

$$d_1 = 1$$

再算 d_2 。将 $c_2 A^0 B$ 代入式 (7.6.5) 得

$$c_2 A^0 B = [0 \quad 0]$$

$$c_2 A^l B = [0 \quad 1]$$

使 $c_2 A^l B \neq 0$ 的最小值 l 是 1, 所以

$$d_2 = 1$$

② 根据值 d_1 定义下列矩阵

$$D = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ c_2 A^{d_2} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ c_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} B \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} c_1 A^{(d_1+1)} \\ c_2 A^{(d_2+1)} \\ \vdots \\ c_m A^{(d_m+1)} \end{bmatrix}$$

例 7.6.3 试计算例 7.6.2 中的 D , E 和 L 。

解

$$D = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} \\ c_2 A^{d_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A \\ c_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ c_2 A^{d_2} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 AB \\ c_2 AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} c_1 A^{(d_1+1)} \\ c_2 A^{(d_2+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 A^2 \\ c_2 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 7.6 能解耦性判据。受控系统 $\Sigma_0(A, B, C)$ 采用状态反馈能解耦的充分必要条件是 $m \times m$ 维矩阵为非奇异的, 即

$$\det E = \det \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ c_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \neq 0$$

定理 7.7 若受控系统 Σ_0 满足定理 7.6 中的条件, 即 Σ_0 是可以采用状态反馈实现解耦的, 当选择状态反馈矩阵为

$$K = E^{-1} L \quad (7.6.6)$$

输入变换阵为

$$F = E^{-1} \quad (7.6.7)$$

则其闭环系统是一个积分型解耦系统。

其中, 闭环系统状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BF}\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{BE}^{-1}\mathbf{L})\mathbf{x} + \mathbf{BE}^{-1}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}$$

闭环系统的传递函数阵为

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BF} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{(d_1+1)}} & & & \mathbf{0} \\ & \frac{1}{s^{(d_2+1)}} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \frac{1}{s^{(d_n+1)}} \end{bmatrix} \quad (7.6.8)$$

由式 (7.6.8) 可看出, 根据定理 7.7 所得到的解耦系统其每个子系统相当于一个 $(d_i + 1)$ 阶的积分器, 所以称这种解耦系统为积分器型解耦系统。

例 7.6.4 判别例 7.6.2 受控系统 Σ_0 采用状态反馈解耦的可能性。

解

由例 7.6.3 的计算可知, 由于 $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一个非奇异的矩阵, 依定理 7.6, 该系统可以

采用状态反馈实现解耦。

例 7.6.5 试求例 7.6.2 受控系统的状态反馈解耦矩阵 \mathbf{K} 和输入变换阵 \mathbf{F} 。

解

例 7.6.2 和例 7.6.3 已经算得

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按照式 (7.6.6)、式 (7.6.7) 有

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BE}^{-1}\mathbf{L})\mathbf{x} + \mathbf{BE}^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (7.6.9)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (7.6.10)$$

闭环系统的传递函数阵为

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{(d_1+1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{(d_2+1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \quad (7.6.11)$$

闭环系统状态反馈解耦结构图如图 7.12 所示。

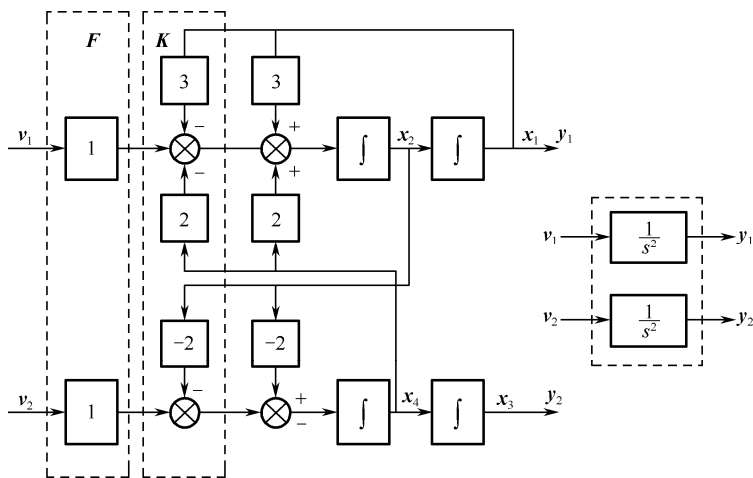


图 7.12 例 7.6.5 的解耦结构图

从图 7.12 解耦结构图看出，状态反馈解耦矩阵中的每个元素的作用是消去相应状态变量间的交连影响，使解耦后的系统变为一些单输入单输出的子系统。由于分解出的单输入单输出子系统，其信号传递关系都是多重积分关系，所以这些子系统由于所有的极点都处于原点，其动态性能是不会满意的。

(3) 解耦后子系统的附加综合

下面只讨论在解耦后的各子系统中再施加附加的状态反馈达到极点配置的方法。

如何对各独立子系统实施状态反馈进行极点的任意配置呢?这里只讨论积分型解耦系统是能控能观测的情况。首先必须把积分型解耦系统的闭环状态空间方程化成“标准解耦形式”。一旦化成了标准解耦形式后，便可对每个独立的能控能观测的子系统 $\Sigma_i(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 采用状态反馈：

$$v_i = K_i x_i + w_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.6.12)$$

再按照设计状态反馈阵的方法和步骤求出 K_i 值。

关于标准解耦形式有如下定义：

如果 $\Sigma(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 具有如下形式，

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.6.13)$$

而 $p_i = d_i + 1 (i = 1, 2, \dots, m)$; $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$ ，则称 $\Sigma(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 为标准解耦形式。

例 7.6.6 试对例 7.6.5 的积分型解耦系统设计附加状态反馈,使闭环解耦系统的极点配置 $-1, -1, -1, -1$ 。

解

考虑到例 7.6.5 所得的积分型解耦系统为

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right],$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} b_1 & 0 \\ \hline 0 & b_2 \end{array} \right],$$

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & c_2 \end{array} \right]^\circ.$$

A, B, C 已具有式 (7.6.13) 的解耦标准型, 所以可分别对各独立子系统进行状态反馈。

对于 $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$, 有 $v_1 = [k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w_1$;

对于 $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$, 有 $v_2 = [k_3 \quad k_4] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + w_2$ 。

将其分别代入式 (7.6.9), 整理得

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

由式 (7.6.10), 有

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

为使闭环系统极点配置在位置上, 按照求解状态反馈矩阵的方法和步骤可得出

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -2$$

例 7.6.7 系统结构图如图 7.13 所示

综上所述, 采用状态反馈实现系统解耦的综合方法及其步骤如下:

- ① 检验受控系统是否满足能解耦的充要条件;
- ② 按照式 (7.6.6) 和式 (7.6.7) 计算状态反馈矩阵和输入变换阵。把系统化成标准解耦形式;
- ③ 对独立的子系统按式 (7.6.12) 用附加状态反馈, 把极点配置为期望值。

如果在积分型解耦系统中存在不能控不能观测的状态, 则在采用附加状态反馈时, 必须通过非奇异变换, 使其化成能解耦标准型, 这部分内容由于计算繁琐而没作介绍, 有兴趣的读者可参阅有关文献或书籍。

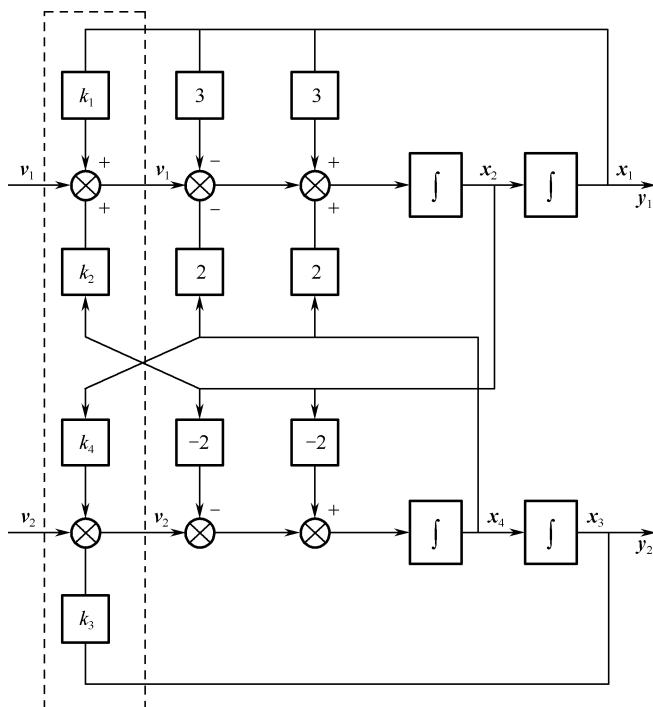


图 7.13 例 7.6.7 系统结构图

最后还应该说明, 对不满足状态反馈解耦充要条件的受控系统, 只要其传递函数矩阵是非奇异的, 除可以采用串联补偿器解耦外, 还可以采用状态反馈加串联补偿器的办法进行解耦, 如图 7.14 所示。

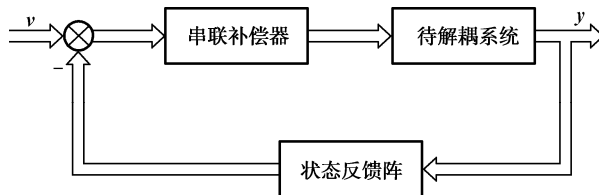


图 7.14 用状态反馈加串联补偿器进行解耦示意图

7.7 MATLAB 在闭环极点配置及状态观测器设计中的应用

MATLAB 控制系统工具箱中提供了很多函数用来进行系统的状态反馈和状态观测器的设计。

7.7.1 系统的极点配置

当系统完全能控时, 通过状态反馈可实现闭环系统极点的任意配置。关键是求解状态反馈阵 \mathbf{K} , 当系统的阶数大于 3 以后, 或为多输入多输出系统时, 具体设计要困难得多。如果采用 MATLAB 的辅助设计问题就简单多了。

例 7.7.1 已知系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

采用状态反馈，将系统的极点配置到-1，-2，-3，求状态反馈阵 \mathbf{K} 。

解 MATLAB 程序为

```
A=[-2 -2 1 ; 1 0 1 ; -1 0 1] ;
b=[ 1 ; 1 ; 1];
Uc=ctrb(A, b);
rc=rank(Uc);
f=conv([1, 1], conv([1, 2], [1, 3])) ;
K=[zeros(1, length(A)-1)1]*inv(Uc)*polyvalm(f, A)
```

执行后得

```
K=
-1 2 4
```

其实，在 MATLAB 的控制系统工具箱中就提供了单变量系统极点配置函数 `acker`，该函数的调用格式为

$$\mathbf{K}=\text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{P})$$

式中， \mathbf{P} 为给定的极点， \mathbf{K} 为状态反馈阵。

对例 1，采用下面命令可得同样结果。

```
>>A=[-2 -1 1; 1 0 1; -1 0 1]; b=[1; 1; 1];
>>rc=rank(ctrb(A, b));
>>p=[-1, -2, -3];
>>K=acker(A, b, p)
```

结果显示

```
K=
-1 2 4
```

例 7.7.2 某系统状态空间描述如下，试确定状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} ，使闭环系统的极点为 -2， $-1 \pm j$ 。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [10 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

求解反馈矩阵，并计算反馈后的闭环系统的状态矩阵。

解 相关指令为：

```
a=[0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
b=[0; 0; 1];
```

```
p=[-2 -1+i -1 -i];
k=p(a, b, p)
A=a-b*k
```

运行结果为:

```
k=
    4.0000    4.0000    1.0000
A=
     0     1     0
     0     0     1
    -4    -6    -4
```

或者采用 $k=\text{acker}(a, b, p)$, 运行结果为:

```
k=
     4     4     1
```

与理论一致。

例 7.7.3 考虑如下线性定常系统, 期望闭环极点为 $-2 \pm j4$ 和 -10 。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

计算矩阵 A 的矩阵多项式 $f(A)$ 和 $f^*(A)$ 。

解 (1) 计算矩阵 A 自身的多项式 $f(A)$ 。

相关指令如下:

```
A=[0 1 0; 0 0 1; -1 -5 -6];
J=poly(A)
fA=polyvalm(J, A)
J=
    1.0000    6.0000    5.0000    1.0000
fA=
    1.0e-012 *
         0.0018    0.0053    0.0053
        -0.0053   -0.0266   -0.0266
         0.0266    0.1386    0.1350
```

可见, 矩阵 A 必定满足其自身的特征方程, 有 $f(A)=0$, 证实了凯莱-哈密顿定理。

(2) 计算所定义的 $f^*(A)$ 。

```
J=[1 14 60 200];
f=polyvalm(J, A)
f=
```

199 55 8
-8 159 7
-7 -43 117

7.7.2 用 MATLAB 设计状态观测器

单输入单输出系统全维观测器的极点配置设计可应用 MATLAB 命令进行；也可基于对偶原理，应用 MATLAB 控制系统工具箱中的函数 place 和 acker 直接求解。

例 7.7.4 应用 MATLAB 极点配置函数求解全维观测器设计问题，被控系统 $\Sigma_0(A, B, C)$ 的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1]x$$

试设计全维状态观测器，使其极点为 -3, 3。

解 求解程序：

```
A=[1 3; 0 -1; ]
C=[1 1];
P=[-3 ; -3];           %由观测器期望极点构成向量 P
Gt=acker(A',C',P);     %求对偶系统  $\Sigma_0(A', B', C')$  的状态反馈
G=Gt'                  %求系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  的观测器偏差反馈增益矩阵 G
```

运行 MATLAB Program 2 程序后，得 $G = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ，若再输入如下指令

```
eig(A-G*C)
```

可验证状态观测器极点确被配置到期望位置 -3, -3 处。

思考题与习题

7.1 已知系统状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试判定系统是否可采用状态反馈分别配置以下两组闭环特征值：{-2, -2, -1}；{-2, -2, -3}。若能配置，求出反馈阵 K 。

7.2 已知系统状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0]x$$

试设计一状态观测器，使观测器的极点为 $-r, -2r (r>0)$ 。

7.3 已知系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

(1) 设计一个降维状态观测器，将观测器的极点配置在-4, -5 处；

(2) 画出其结构图。

7.4 设系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

现引入状态反馈 $u = r - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ 构成闭环系统， $\hat{\mathbf{x}}$ 为 \mathbf{x} 的估值。

(1) 写出该系统状态变量的全维渐近观测器的状态方程；

(2) 写出带状态反馈全维观测器的闭环系统的状态方程，并画出包括状态反馈及全维观测器的闭环系统结构图。

7.5 设被控系统的状态空间表达式为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ，试分析能否采用状态

反馈使闭环系统极点配置为-2, -2, -2, -1 或-2, -2, -2, -2 ? 若可能，用 MATLAB 求出满足要求的状态反馈增益矩阵 \mathbf{F} 。

7.6 已知系统的状态空间描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

采用状态反馈，试分析反馈矩阵 $\mathbf{K} = [-1 \quad 0]$ 时，闭环系统的能控性和能观测性。

7.7 设线性定常系统的状态空间描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

试设计一个状态观测器，要求将其极点配置在-3, -4, -5 上，画出状态变量图。

7.8 给定系统状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

确定一个状态反馈矩阵 \mathbf{K} ，使得单位阶跃响应的期望性能满足：最大超调量 $\sigma\% \leq 20\%$ ，过渡时间 $t_s \leq 0.4s$ 。

7.9 给定系统的状态空间描述，判断系统能否利用输入变换-状态反馈进行解耦。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

7.10 给定线性定常系统

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

- (1) 试设计一个全维状态观测器，该观测器的期望特征值为 $\lambda_1^* = \lambda_2^* = -5$ 。
- (2) 假设输出 \mathbf{y} 是可以准确量测的，试设计一个最小阶观测器，该观测器的期望特征值为 $\lambda^* = -5$ 。

参 考 文 献

- [1] 王宏华, 王时胜. 现代控制理论 (第 2 版). 北京: 电子工业出版社, 2013.
- [2] 胡皓, 王春侠, 任鸟飞. 现代控制理论. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [3] 胡寿松. 自动控制原理基础教程 (第 3 版). 北京: 科学出版社, 2013.
- [4] 梁慧冰, 孙炳达. 现代控制理论基础. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [5] 郑大中. 线性系统理论 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [6] 张嗣瀛, 高立群. 现代控制理论. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [7] 王建辉, 顾树生. 自动控制原理 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [8] 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言与应用 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [9] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题得到 MATALB 求解 (第 3 版). 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [10] 罗转翼, 程桂芬, 付家才. 控制工程与信号处理. 北京: 化学工业出版社, 2004.
- [11] 绪方胜彦. 现代控制工程. 北京: 科学出版社, 1976.
- [12] William L Brogan. Modern Control Theory. NJ: Prentice Hall, 2000.
- [13] 刘豹 唐万生. 现代控制理论 (第 3 版). 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [14] 顾幸生, 刘漫丹, 张凌波. 现代控制理论及应用. 华东理工大学出版社, 2008.
- [15] 方水良. 现代控制理论及其 MATLAB 实现. 北京: 电子工业出版社, 2014.
- [16] 石海彬. 现代控制理论. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- [17] 曹永岩. 现代控制理论的工程应用. 杭州: 浙江大学出版社, 2000.
- [18] 许世范, 陈颖, 侯媛彬. 现代控制理论简明教程. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2009.
- [19] 王孝武. 现代控制理论基础 (第 2 版). 北京: 机械工业出版社, 2006.

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为，歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010) 88254396; (010) 88258888

传 真：(010) 88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036

